

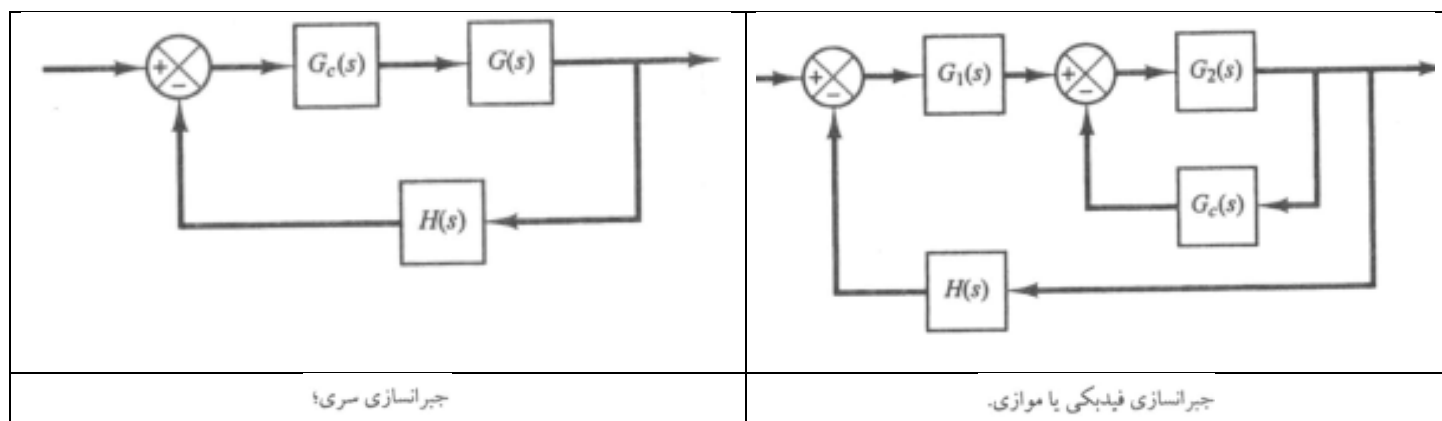
طراحی سیستم کنترل با رهیافت

مکان هندسی ریشه‌ها

در عمل ممکن است نمودار مکان هندسی ریشه‌ها نشان دهد که با تنظیم بهره (یا یک پارامتر قابل تغییر دیگر) نمی‌توان به عملکرد مطلوب دست یافت. حتی در بعضی موارد سیستم به ازای هیچ بهره‌ای (یا هیچ مقداری از پارامتر قابل تنظیم) پایدار نیست. بنابراین باید برای دستیابی به خواسته‌ها مکان هندسی ریشه‌ها را تغییر شکل داد.

بنابراین مسئله طراحی به مسئله بهبود عملکرد سیستم با قرار دادن جبرانساز تبدیل می‌شود. جبرانسازی سیستم کنترل نیز به طراحی فیلتری منتهی می‌شود که مشخصه‌اش باید مشخصات نامطلوب و تغییرناپذیر وسیله را جبران کند.

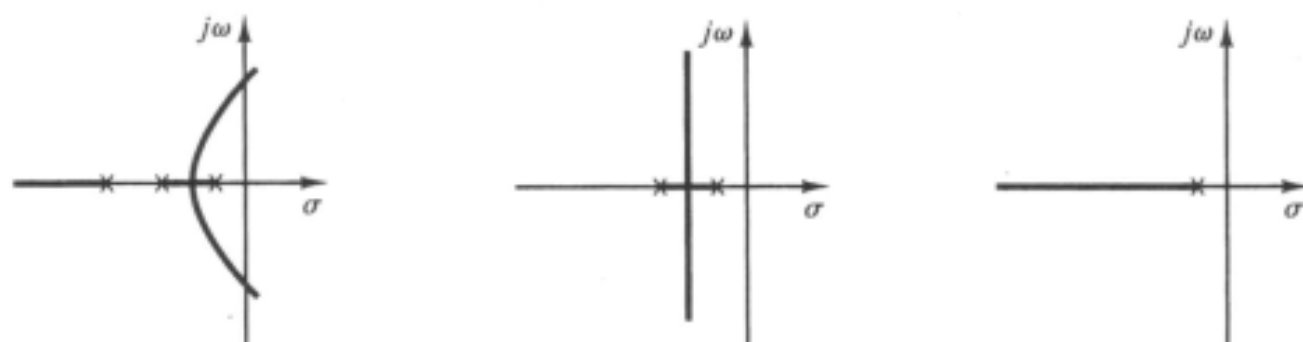
در طراحی سیستم کنترل اگر چیزی بیش از تنظیم بهره (یا یک پارامتر قابل تنظیم دیگر) لازم باشد، باید مکان هندسی ریشه‌ها را با گذاشتن جبرانساز مناسب تغییر داد. با درک کامل اثر افزودن قطب یا صفر بر مکان هندسی ریشه‌ها می‌توان محل قطب(ها) و صفر(های) جبرانساز لازم برای ایجاد تغییر شکل مطلوب را تعیین کرد. گلب روش طراحی با مکان هندسی ریشه‌ها این است که مکان هندسی را با استفاده از جبرانساز طوری تغییر دهیم که یک زوج قطب غالب حلقه بسته در محل‌های مطلوب ایجاد شود.



در جبرانسازی سیستم‌های کنترل مسئله معمولاً به طراحی مناسب یک جبرانساز سری یا موازی منجر می‌شود. گزینش بین جبرانسازی سری یا موازی براساس طبیعت سیگنال‌های سیستم، سطح توان در نقاط مختلف، اجزاء قابل دسترس، تجربه طراح، ملاحظات اقتصادی و غیره صورت می‌گیرد.

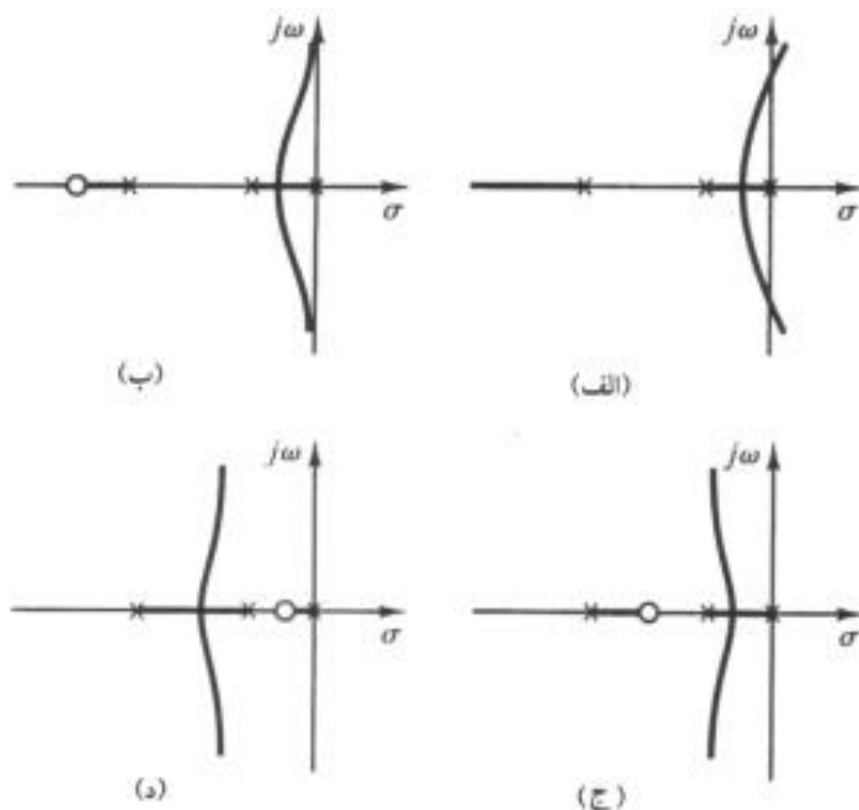
به طور کلی جبرانسازی سری ساده‌تر از جبرانسازی موازی است؛ ولی این جبرانسازی معمولاً به تقویت کننده‌های اضافی برای افزایش بهره و/یا ایجاد جداسازی نیاز دارد. (برای پرهیز از مصرف توان اضافی جبران‌ساز سری در کم انرژی‌ترین نقطه مسیر پیش‌خورده قرار داده می‌شود.) در حالت کلی تعداد اجزاء لازم برای جبران‌سازی موازی کمتر از تعداد اجزاء لازم برای جبران‌سازی سری است (به شرطی که سیگنال مناسب موجود باشد)، زیرا انتقال انرژی از نقطه‌ای یا انرژی بالاتر به نقطه‌ای با انرژی پایین‌تر صورت می‌گیرد. (یعنی تقویت کننده اضافی لازم نیست.)

اثر افزودن قطب. افزودن یک قطب به تابع تبدیل حلقه باز باعث می‌شود مکان هندسی ریشه‌ها به سمت راست کشیده شود، و در جهت کم شدن پایداری نسبی سیستم و کند کردن زمان نشست پاسخ عمل می‌کند. (به یاد داشته باشید که افزودن عمل کنترل انتگرالی یک قطب در مبدأ ایجاد می‌کند، و به سیستمی با پایداری کمتر منجر می‌شود.) شکل ۶-۳۴ اثرهای افزودن یک قطب به یک سیستم تک‌قطبی و افزودن دو قطب به یک سیستم تک‌قطبی را نشان می‌دهد.

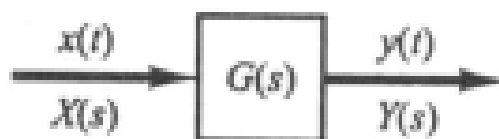


اثر افزودن صفر. افزودن یک صفر به تابع تبدیل حلقه باز مکان هندسی ریشه‌ها را به سمت چپ می‌کشد، سیستم را پایدارتر و سرعت نشست پاسخ را بیشتر می‌کند. (از لحاظ فیزیکی افزودن صفر به تابع تبدیل مسیر پیش‌خورده معادل کاربرد کنترل مشتقی است. این کار یک حالت پیش‌بینی به سیستم می‌دهد و به پاسخ گذرا

سرعت می‌دهد.



یافتن خروجی حالت ماندگار به ورودی سینوسی.

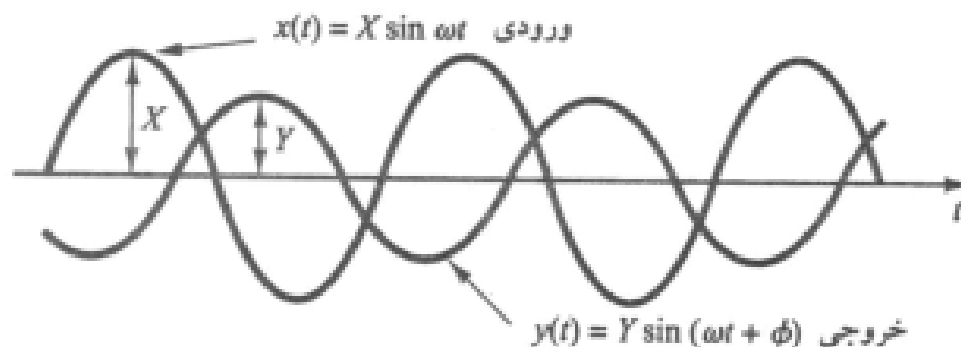


سیستم پایدار، خطی، و مستقل از زمان.

سیستم خطی مستقل از زمان شکل ۷-۱ را در نظر بگیرید. ورودی و خروجی این سیستم که تابع تبدیل آن $G(s)$ است، به ترتیب با $x(t)$ و $y(t)$ مشخص شده‌اند. اگر $x(t)$ یک سیگنال سینوسی باشد، خروجی حالت ماندگار نیز یک سینوسی با همان فرکانس است، ولی دامنه و فاز آن می‌تواند متفاوت باشد.

فرض کنید سیگنال ورودی به صورت زیر است

$$x(t) = X \sin \omega t$$



$$Y = X |G(j\omega)|$$

$$\phi = \angle G(j\omega)$$

در فصل ۶ گفتیم که زاویه فاز منفی را پسفازی و زاویه فاز مثبت را پیشفازی می‌نامند. شبکه دارای مشخصه پسفازی شبکه پیشفاز، و شبکه دارای مشخصه پسفازی شبکه پسفاز نامیده می‌شود.

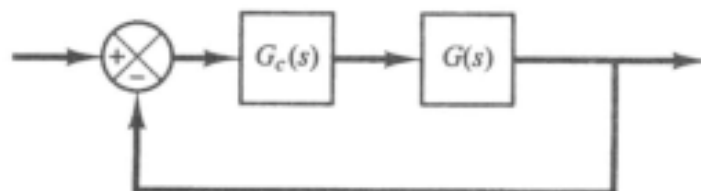
اگر یک ورودی سینوسی به یک شبکه اعمال شود و خروجی حالت ماندگار (که آن هم سینوسی است) نسبت به ورودی پیشفاز باشد، آن شبکه را شبکه پیشفاز می‌نامند. (زاویه پسفازی تابعی از فرکانس ورودی است.) اگر سینوسی حالت ماندگار خروجی نسبت به ورودی پسفاز باشد، شبکه را پسفاز می‌نامند. در شبکه پسفاز-پسفاز هم پسفازی و هم پسفازی رخ می‌دهد، ولی در ناحیه‌های فرکانسی مختلف؛ پسفازی در ناحیه فرکانس پایین و پسفازی در ناحیه فرکانس بالا. جبرانسازی که مشخصه یک شبکه پیشفاز را داشته باشد، جبران‌ساز پیشفاز خوانده می‌شود؛ به همین ترتیب جبران‌ساز پسفاز و پسفاز-پسفاز نیز داریم.

از میان انواع گوناگون جبران‌سازها، پرکاربردترین آنها جبران‌سازهای پیشفاز، جبران‌سازهای پسفاز، جبران‌سازهای پسفاز-پسفاز، و جبران‌سازهای فیدبک سرعت (تاکومتری) هستند. در این فصل بحث خود را عمدتاً به این جبران‌سازها محدود می‌کنیم. جبران‌سازهای پیشفاز، و پسفاز - پیشفاز می‌توانند وسایل الکترونیکی (مثلاً مدارهای آپامپی) یا شبکه‌های RC (الکتریکی، مکانیکی، نیوماتیکی، هیدرولیکی یا ترکیب از آنها) و تقویت کننده باشند.

کنترل‌کننده‌های PID که در سیستم‌های کنترل صنعتی بسیار متداول هستند در فصل ۸ مورد بررسی قرار خواهند گرفت.

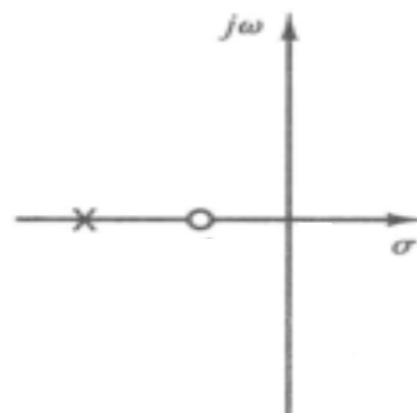
باید متذکر شویم که طراحی سیستم کنترل به روش مکان هندسی یا روش پاسخ فرکانسی جواب یکتایی ندارد، زیرا بهترین جواب یا جواب بهینه را نمی‌توان در حالتی که مشخصات حوزه زمان یا مشخصات حوزه فرکانس داده شده است، تعیین کرد.

جبران سازی پیشفاز



$$G_c(s) = K_c \alpha \frac{Ts + 1}{\alpha Ts + 1} = K_c \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\alpha T}} \quad (0 < \alpha < 1)$$

α و T باید با توجه به کمبود فاز
 K_c با توجه به خواسته های مربوط به بهره حلقه



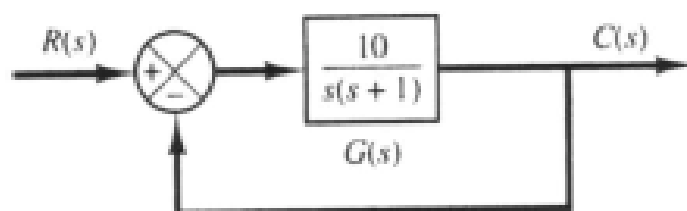
روش طراحی جبران ساز پیشفاز

با توجه به مشخصات عملکرد، محل مطلوب برای قطبهای حلقه بسته غالب را تعیین کنید.
 با رسم مکان هندسی ریشه های سیستم جبران نشده (سیستم اصلی) تعیین کنید که آیا با تنظیم بهره می توان قطبهای حلقه بسته را به مکان مطلوب برد یا نه. در صورت منفی بودن جواب کمبود زاویه ϕ را محاسبه کنید. این زاویه ای است که جبران کننده پیشفاز باید اضافه کند تا مکان هندسی جدید از محل قطبهای حلقه بسته مطلوب بگذرد.

اگر ثابتهای خطای ایستا مشخص نشده اند، محل قطب و صفر جبران ساز پیشفاز را به نحوی تعیین کنید که این جبران ساز کمبود فاز ϕ را تامین کند. اگر قید دیگری بر سیستم گذاشته نشده، α را تا حد ممکن بزرگ بگیرید. معمولاً هر چه α بزرگتر باشد K_v بزرگتری حاصل می شود که امری مطلوب است. توجه کنید که

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s G_c(s) G(s) = K_c \alpha \lim_{s \rightarrow 0} s G_c(s)$$

بهره حلقه باز سیستم جبران شده K_c را با توجه به شرط اندازه تعیین کنید.



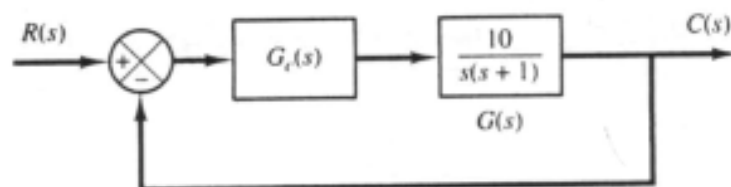
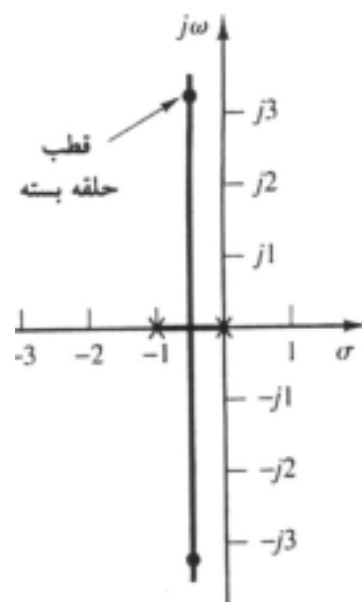
$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{10}{s^2 + s + 10} = \frac{10}{(s + 0.5 + j3.1225)(s + 0.5 - j3.1225)}$$

$$s = -0.5 \pm j3.1225$$

$$\zeta = (1/2) / \sqrt{10} = 0.1581$$

$$\omega_n = \sqrt{10} = 3.1623 \text{ rad/s}$$

پاسخ پله این سیستم فراجش بزرگی دارد



جبران ساز پیش فاز طرح کنیم تا نسبت میرایی

قطبهای حلقه بسته $\zeta = 0.5$ و فرکانس طبیعی نامیرا $\omega_n = 3 \text{ rad/s}$ شود

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = s^2 + 3s + 9$$

$$s = -1.5 \pm j2.5981$$

$$G_c(s) = K_c \alpha \frac{Ts + 1}{\alpha Ts + 1} = K_c \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\alpha T}} \quad (0 < \alpha < 1)$$

زاویه از قطب واقع در مبدا به محل قطب حلقه بسته مطلوب واقع در $s = -1/5 + j2/5981$ برابر 120° است. زاویه از قطب واقع در $s = -1$ تا قطب حلقه بسته مطلوب نیز $100/894^\circ$ است. بنابراین کمبود زاویه عبارت است از

$$\text{کمبود زاویه} = 180^\circ - 120^\circ - 100/894^\circ = -40/894^\circ$$

زاویه $40/894^\circ$ باید توسط جبران‌ساز پیشفاز تامین شود.

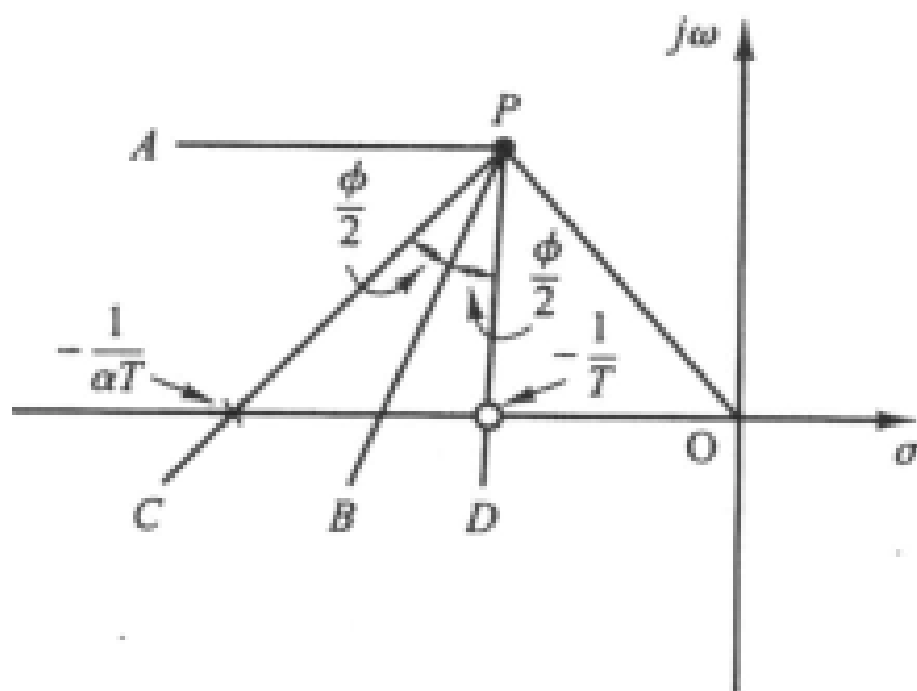
این مسئله جواب یکتا ندارد. تعداد جوابها بینهایت است
راه‌های متعددی برای تعیین محل صفر و قطب جبران‌ساز پیشفاز وجود دارد

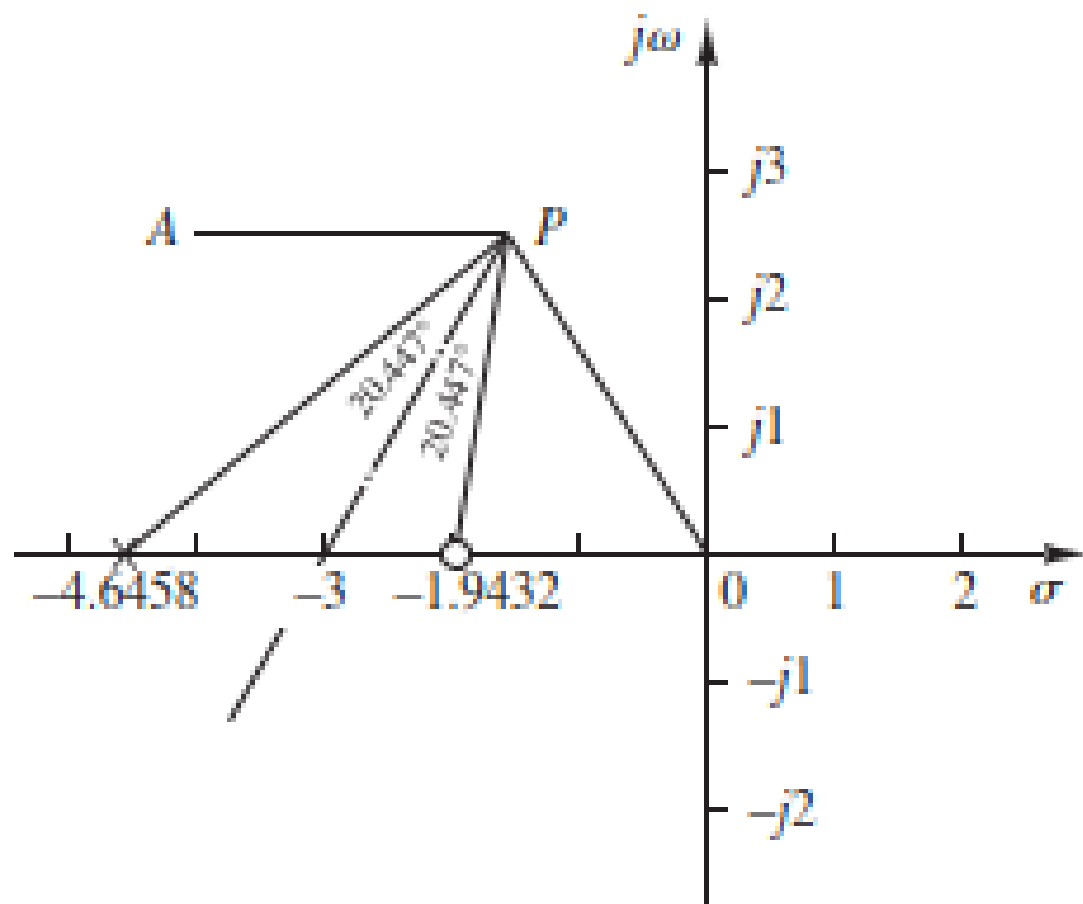
روش ۱

یافتن بزرگترین مقدار α

هر چه α بزرگتر باشد، K_v بزرگتر می‌شود.

اکثر موارد K_v بزرگتر با عملکرد بهتر سیستم متناظر است





zero at $s = -1.9432$

pole at $s = -4.6458$

$$\alpha = 1.9432/4.6458 = 0.418$$

$$G_c(s) = K_c \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\alpha T}} = K_c \frac{s + 1.9432}{s + 4.6458}$$

$$\left| K_c \frac{s + 1.9432}{s + 4.6458} \frac{10}{s(s + 1)} \right|_{s=-1.5+j2.5981} = 1$$

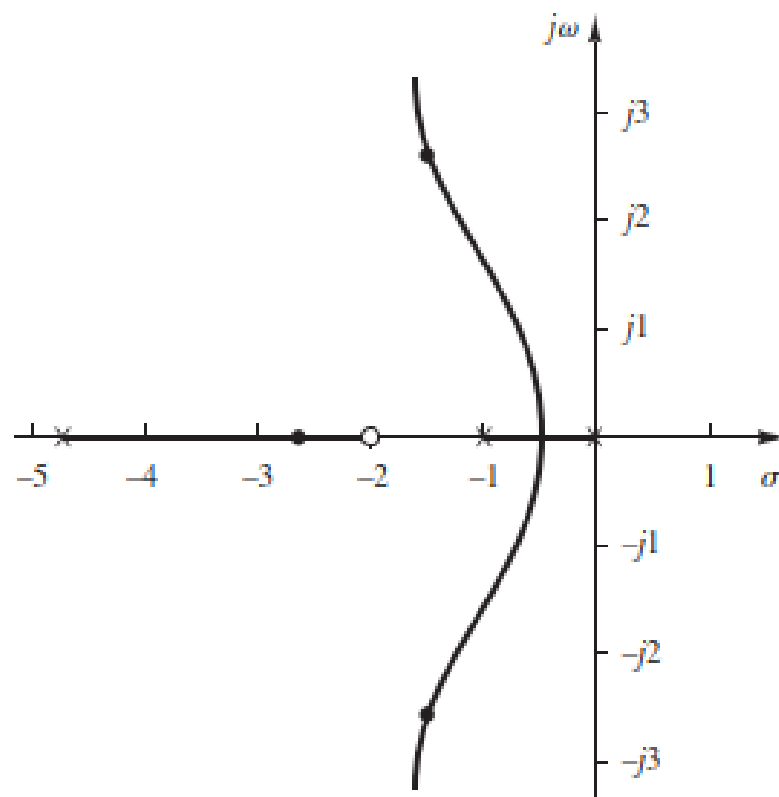
$$K_c = \left| \frac{(s + 4.6458)s(s + 1)}{10(s + 1.9432)} \right|_{s=-1.5+j2.5981} = 1.2287$$

$$G_c(s) = 1.2287 \frac{s + 1.9432}{s + 4.6458}$$

$$\begin{aligned} \frac{C(s)}{R(s)} &= \frac{12.287(s + 1.9432)}{s(s + 1)(s + 4.6458) + 12.287(s + 1.9432)} \\ &= \frac{12.287s + 23.876}{s^3 + 5.646s^2 + 16.933s + 23.876} \end{aligned}$$

$$s^3 + 5.646s^2 + 16.933s + 23.875 = (s + 1.5 + j2.5981)(s + 1.5 - j2.5981)(s + 2.65)$$

$$\begin{aligned} K_v &= \lim_{s \rightarrow 0} sG_c(s)G(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s \left[1.2287 \frac{s + 1.9432}{s + 4.6458} \frac{10}{s(s + 1)} \right] \\ &= 5.139 \end{aligned}$$



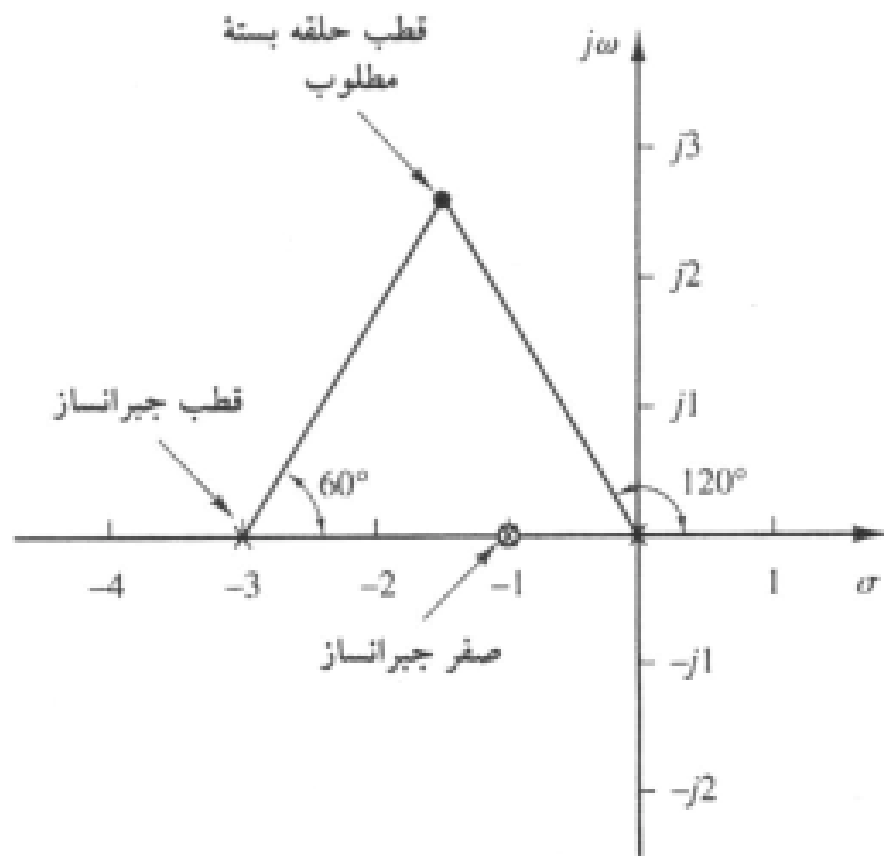
روش ۲

صفر جبرانساز پیشفاز یک قطب دستگاه را حذف می‌کند

صفر جبرانساز پیشفاز را در $s = -1$ قرار دهیم

با توجه به شرط زاویه در محل قطب مطلوب داریم:

قطب جبرانساز باید در $s = -3$ قرار گیرد



$$G_c(s) = K_c \frac{s+1}{s+3}$$

$$\left| K_c \frac{s+1}{s+3} \frac{1}{s(s+1)} \right|_{s=-1/5 + j\sqrt{5}/5} = 1$$

$$K_c = \left| \frac{s(s+3)}{1} \right|_{s=-1/5 + j\sqrt{5}/5} = 0.4$$

$$G_c(s) = 0.4 \frac{s+1}{s+3}$$

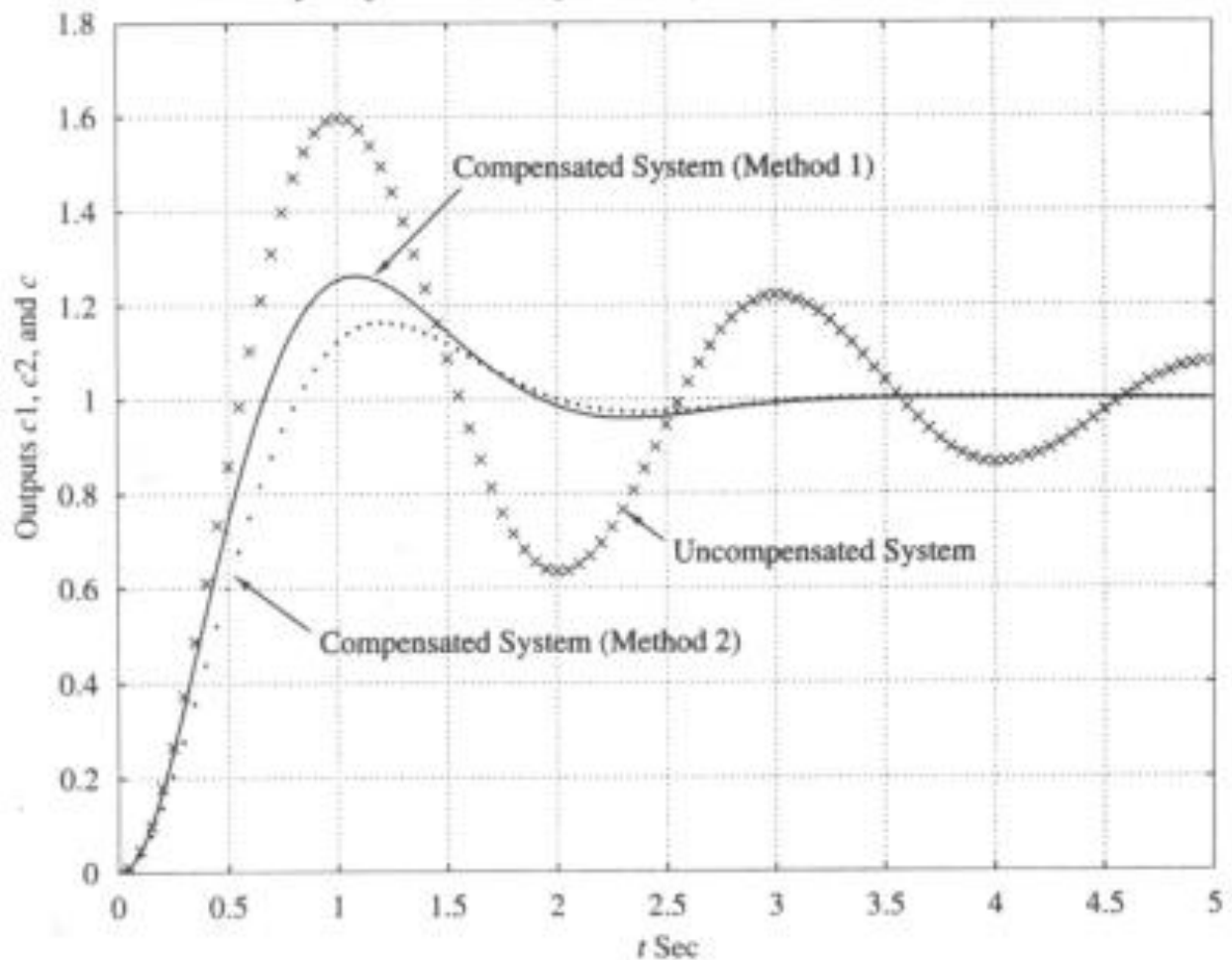
$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{4}{s^2 + 3s + 4}$$

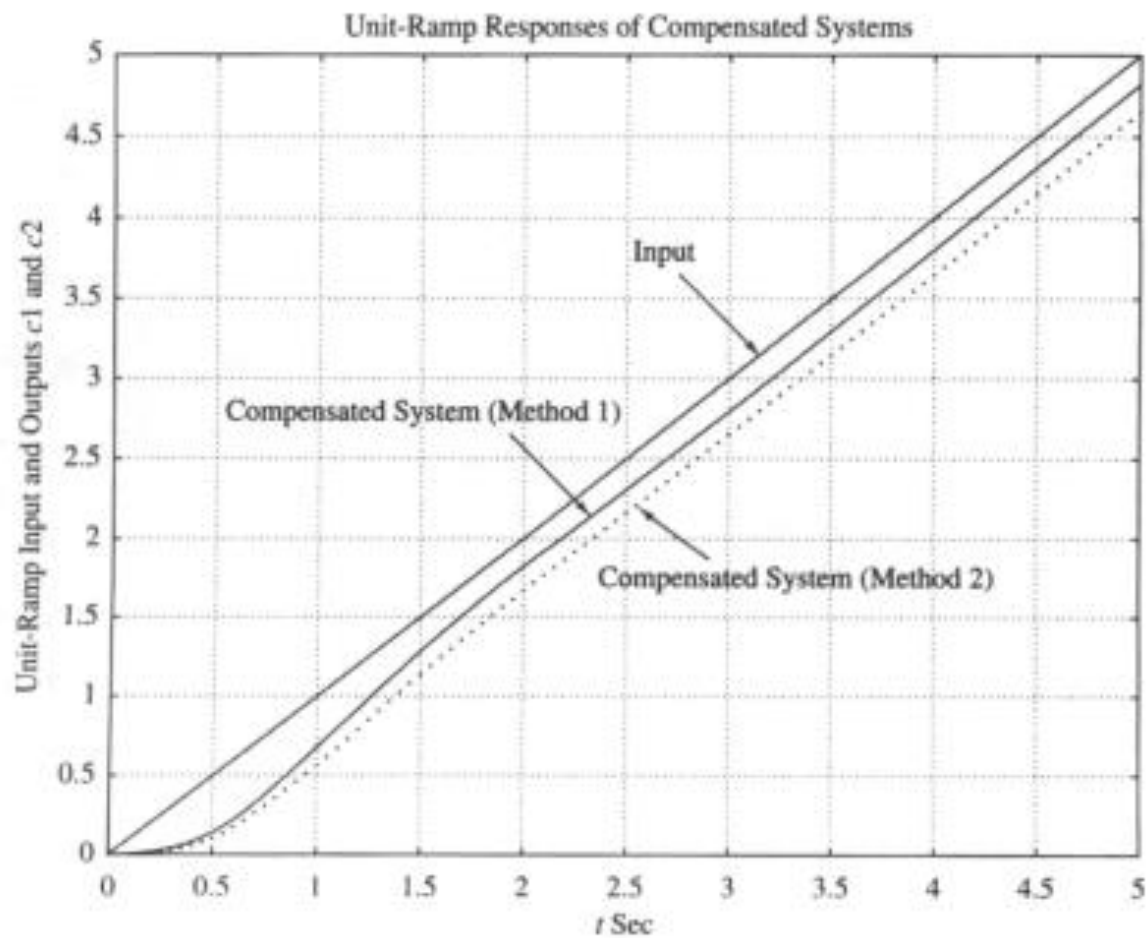
$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s G_c(s) G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \left[\frac{4}{s(s+3)} \right] = 3$$

توجه کنید که سیستم طراحی شده به روش اول مقدار بزرگتری برای ثابت خطای ایستای سرعت به دست می‌دهد. بنابراین سیستم طراحی شده به روش اول نسبت به سیستم طراحی شده به روش دوم، خطای حالت ماندگار کوچکتری در دنبال کردن ورودی شیب دارد.

مقدار K_v به ازای ترکیب‌های مختلف صفر و قطب جبرانسازی که کمبود زاویه $40/894^\circ$ را ایجاد می‌کنند، تفاوت دارد. هر چند می‌توان با بررسی این ترکیب‌های مختلف مقدار K_v را تغییر داد، ولی اگر مقدار بزرگی برای K_v مورد نظر باشد، باید به جای جبران‌ساز پیش‌فاز از جبران‌ساز پس‌فاز استفاده کرد.

Unit-Step Responses of Compensated Systems and Uncompensated System





روش سوم: معادله مشخصه حلقه بسته جبران شده

سیستم حلقه بسته جبران کننده $\rightarrow s^2 + s + 10 \Rightarrow s = -0.5 \pm j \frac{\sqrt{39}}{2} = -0.5 \pm j 3.1225$
 زبرج مطلوب غالب مطلوب $\rightarrow s^2 + 3s + 9 \Rightarrow s^* = -1.5 \pm j 1.5\sqrt{3} = -1.5 \pm j 2.5981$

$$\left| \frac{1}{s(s+1)} \right|_{s^*} = \left| \frac{1}{s^2+s} \right|_{s^*} = \left| \frac{1}{s^2 - \omega^2 + 2\zeta\omega j + s + \omega} \right|$$

$$\rightarrow \left| \frac{1}{(s^2 + s - \omega^2) + j(2\zeta\omega + \omega)} \right| = -\angle \frac{2\zeta\omega + \omega}{s^2 + s - \omega^2} \bigg|_{\substack{s = -1.5 \\ \omega = 1.5\sqrt{3}}}$$

$$\rightarrow -\angle \left[\frac{-3\sqrt{3}}{-6} \right] = -\angle \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -40.894^\circ$$

$\rightarrow \phi = 40.894^\circ$ پهنای باند

$$G_c G_c = K_c \cdot \frac{10}{s(s+1)} \cdot \frac{s + \frac{1}{2T}}{s + \frac{1}{2T}} \Rightarrow$$

معادله مشخصه $\Rightarrow \left[s(s+1) \left(s + \frac{1}{2T} \right) + K \left(s + \frac{1}{2T} \right) \right]_{s=s^*} = 0 \Rightarrow$

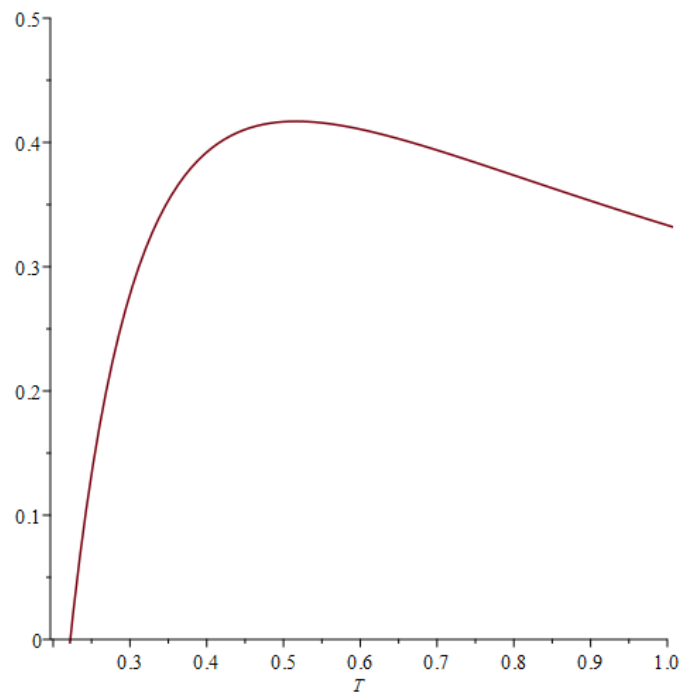
این معادله جبری بر حسب T و α به دست می آید. (بخش حقیقی و ضریبی را ضریب قرار می دهیم و از دو معادله حاصل K را حذف می کنیم)

$$\text{بخش حقیقی} = 0 \rightarrow 22.5 - \frac{6}{2T} - 15K_c + \frac{10K_c}{T} = 0$$

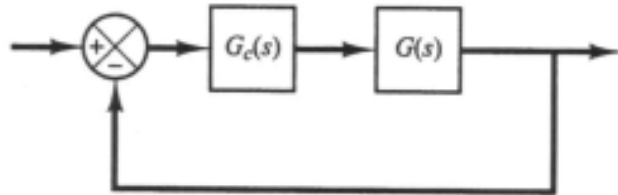
$$\text{بخش تخیلی} = 0 \rightarrow -4.5\sqrt{3} - \frac{3\sqrt{3}}{2T} + 15\sqrt{3}K_c = 0$$

$$\rightarrow 18\alpha T^2 + (3\alpha - 9)T + 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\alpha = \frac{9T - 2}{3T(6T + 1)} \Rightarrow \begin{matrix} T = 0.5162 \\ \alpha = 0.417 \end{matrix}$$



جبران سازی پسفاز



$$G_c(s) = \hat{K}_c \beta \frac{T s + 1}{\beta T s + 1} = \hat{K}_c \frac{s + (1/T)}{s + (1/\beta T)}$$

$$\beta > 1$$

روشهای جبران سازی پسفاز بر اساس رهیافت مکان هندسی ریشه ها. مسئله یافتن یک شبکه جبران ساز مناسب برای سیستمی را که مشخصه پاسخ گذرای مطلوبی دارد، ولی رفتار حالت ماندگار آن رضایتبخش نیست، در نظر بگیرید. در این حالت جبران سازی اساساً به معنی افزایش بهره حلقه باز است، بدون این که مشخصات پاسخ گذرا تغییر محسوسی کند. یعنی مکان هندسی ریشه ها در اطراف قطبهای حلقه بسته غالب نباید تغییر زیادی بکند، ولی بهره حلقه باز باید تا حد لازم زیاد شود. این کار را می توان با گذاشتن یک جبران ساز پسفاز در تابع تبدیل پیشخورد انجام داد.

برای پرهیز از تغییر زیاد مکان هندسی ریشه‌ها زاویه‌ای که جبران‌ساز پسفاز اضافه می‌کند باید در حد کوچکی، مثلاً 5° محدود شود. برای اطمینان از این امر قطب و صفر شبکه پسفاز را نسبتاً نزدیک هم و نزدیک مبدأ صفحه s قرار می‌دهیم. به این ترتیب قطبهای حلقه بسته سیستم جبران شده نسبت به حالت اولیه جابه‌جایی اندکی دارند. پس مشخصات پاسخ گذرا تنها کمی تغییر می‌کند.

$$-5^\circ < \frac{s_1 + \frac{1}{T}}{s_1 + \frac{1}{\beta T}} < 5^\circ$$

s_1 محل یک قطب حلقه بسته غالب

می‌توان β را بزرگ انتخاب کرد. (در صورتی می‌توان β بزرگی برگزید که ساخت جبران‌ساز پسفاز از لحاظ فیزیکی امکان‌پذیر باشد.) دقت کنید که T باید بزرگ باشد، ولی مقدار دقیق آن مهم نیست. ولی مقدار آن نباید خیلی بزرگ باشد، به نحوی که در ساخت جبران‌ساز پسفاز با عناصر واقعی دچار مشکل شویم.

$$\begin{aligned}\hat{K}_v &= \lim_{s \rightarrow 0} s G_c(s) G(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} G_c(s) K_v = \hat{K}_c \beta K_v\end{aligned}$$

عمده‌ترین اثر منفی جبران‌سازی پسفاز در این است که صفر جبران‌ساز نزدیک مبدأ یک قطب حلقه بسته نزدیک مبدأ ایجاد می‌کند. این قطب حلقه بسته و صفر جبران‌ساز باعث می‌شود پاسخ پله دنباله‌ای دراز و کم‌دامنه داشته باشد و به این ترتیب زمان نشست افزایش می‌یابد.

روند طراحی جبران‌ساز پسفاز با استفاده از روش مکان هندسی ریشه‌ها.

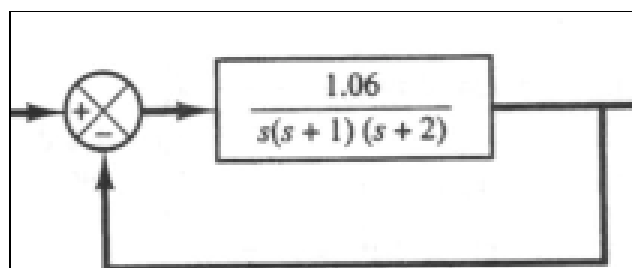
ثابت خطای ایستای مشخص شده در مسئله را حساب کنید.

میزان افزایش ثابت خطای ایستا برای برآورده شدن مشخصات خواسته شده را تعیین کنید .

مکان قطب و صفر جبران‌ساز پسفاز لازم برای افزایش ثابت خطای ایستا، بدون تغییر محسوس مکان هندسی ریشه‌ها، را بیابید. (توجه کنید که نسبت بهره لازم برای سیستم به بهره سیستم جبران نشده با نسبت فاصله صفر از مبدأ به فاصله قطب از مبدأ برابر است).

مکان هندسی ریشه‌های سیستم جبران شده را رسم کنید. محل قطبهای حلقه بسته غالب مطلوب را روی مکان هندسی ریشه‌ها مشخص کنید. (اگر اثر زاویه شبکه پسفاز کوچک (چند درجه) باشد، دو مکان هندسی تقریباً یکسان هستند. در غیر این صورت این دو مکان هندسی تفاوتی با هم دارند. در این صورت قطبهای حلقه بسته غالب تعیین شده براساس مشخصه‌های پاسخ گذرا را روی مکان هندسی جدید مشخص می‌کنید).

بهره $\hat{K}_c$ جبران‌ساز را برابر شرط اندازه‌گیری تعیین کنید که قطبهای حلقه بسته غالب در محلهای مطلوب قرار گیرند. ($\hat{K}_c$ تقریباً برابر ۱ است).



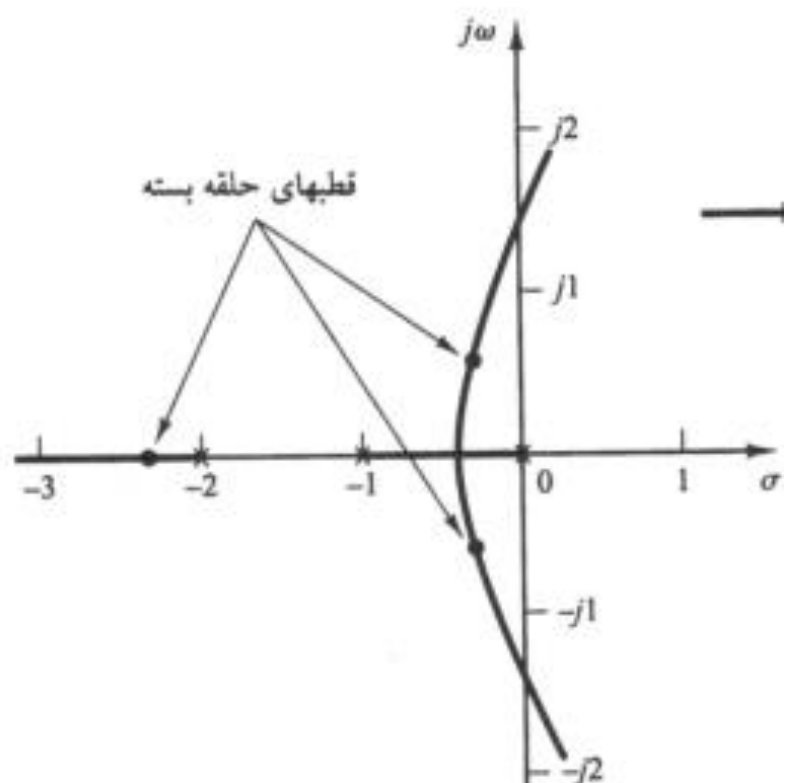
$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1.06}{s(s+1)(s+2) + 1.06}$$

$$s = -0.3307 \pm j 0.5864$$

$$\zeta = 0.491$$

$$0.673 \text{ rad/s}$$

$$0.53 s^{-1} \text{ ثابت خطای ایستای سرعت}$$



می‌خواهیم ثابت خطای ایستای سرعت K_v را به حدود $5s^{-1}$ برسانیم، بدون این که محل قطبهای غالب حلقه بسته تغییر زیادی داشته باشد.

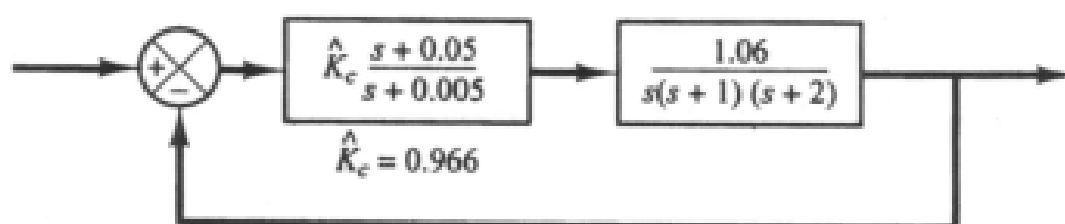
این که ثابت خطای ایستای سرعت با ضریب حدود 10 اضافه شود، β را برابر 10 برمی‌گزینیم

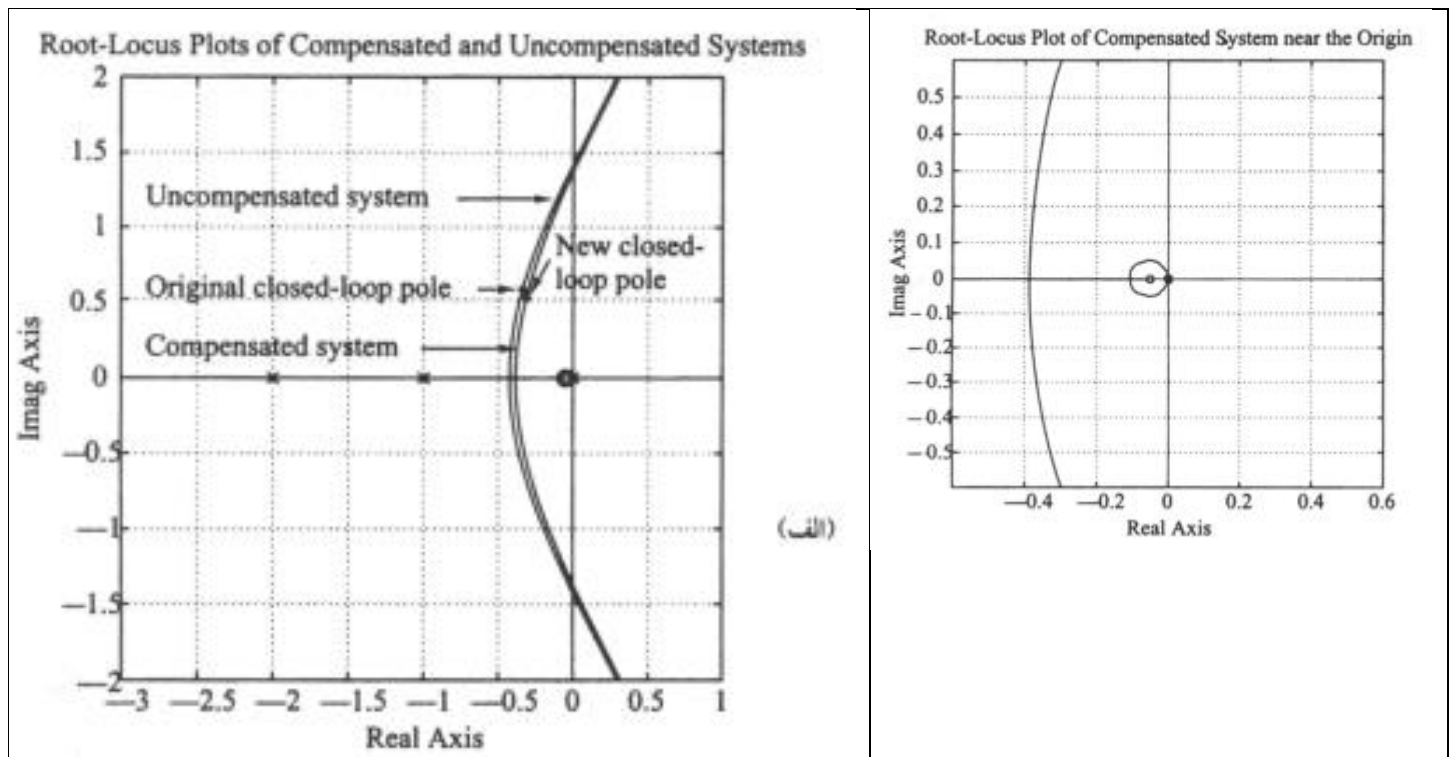
$$G_c(s) = \hat{K}_c \frac{s + 0.05}{s + 0.005}$$

زاویه‌ای که این شبکه پس‌فاز در نزدیکی یک قطب غالب حلقه بسته ایجاد می‌کند حدود 4° است.

$$\begin{aligned} G_c(s)G(s) &= \hat{K}_c \frac{s + 0.05}{s + 0.005} \frac{1.06}{s(s+1)(s+2)} \\ &= \frac{K(s + 0.05)}{s(s + 0.005)(s+1)(s+2)} \end{aligned}$$

$$K = 1.06 \hat{K}_c$$





$$s_2 = -0.31 - j0.55 \quad s_1 = -0.31 + j0.55$$

$$K = \left| \frac{s(s+0.005)(s+1)(s+2)}{s+0.5} \right|_{s=-0.31+j0.55}$$

$$= 10.235$$

پس بهره $\hat{K}_c$ جبران ساز پس فاز به صورت زیر به دست می آید

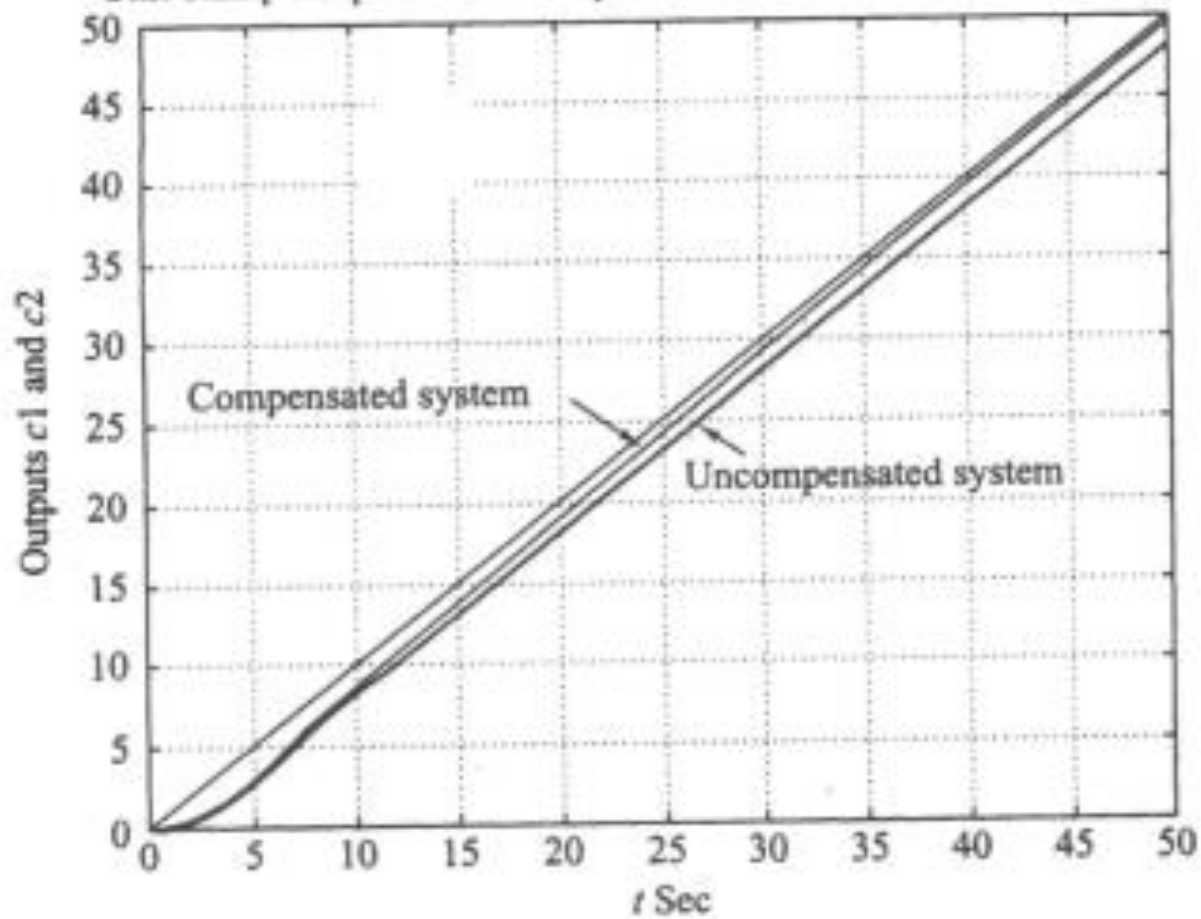
$$\hat{K}_c = \frac{K}{10.6} = \frac{10.235}{10.6} = 0.9656$$

$$G_c(s) = 0.9656 \frac{s+0.5}{s+0.005} = 0.9656 \frac{20s+1}{200s+1}$$

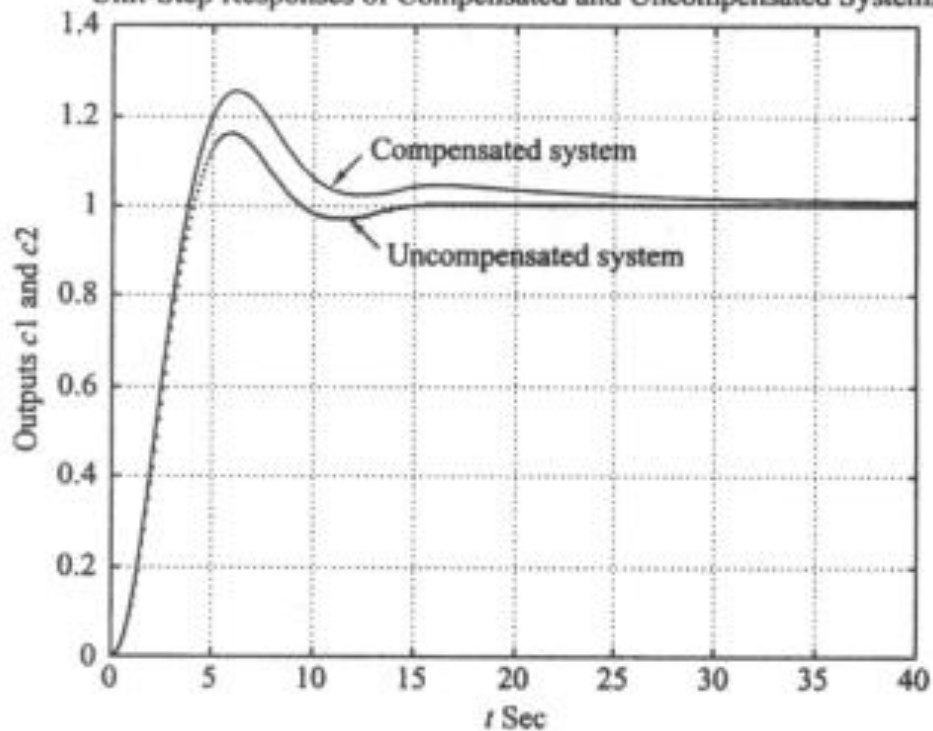
$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s G_1(s) = 0.12 s^{-1}$$

(یعنی خطای حالت ماندگار ورودی شیب به 10٪ مقدار آن در سیستم اصلی رسیده است)

Unit-Ramp Responses of Compensated and Uncompensated Systems



Unit-Step Responses of Compensated and Uncompensated Systems

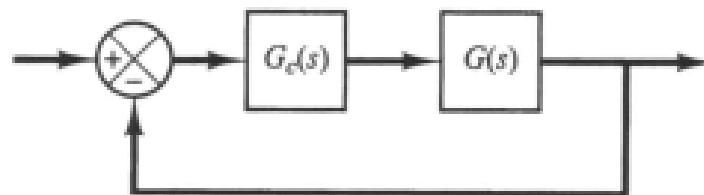


جبران سازی پسفاز – پیشفاز

جبران سازی پیشفاز اساساً سرعت پاسخ را زیاد و پایداری سیستم را بیشتر می کند. جبران سازی پسفاز دقت حالت ماندگار را بهبود می دهد ولی از سرعت پاسخ می کاهد.

اگر هدف بهبود سرعت پاسخ و پاسخ حالت ماندگار باشد، باید هم جبران ساز پیشفاز و هم جبران ساز پسفاز به کار برد. استفاده از یک جبران ساز پسفاز – پیشفاز به جای دو جبران ساز مجزا بصرفه تر است.

جبران سازی پسفاز – پیشفاز مزایای هر دو جبران سازی پسفاز و پیشفاز را دارد. چون جبران ساز پسفاز – پیشفاز دو قطب و دو صفر دارد، کاربرد آن باعث می شود که مرتبه سیستم دو واحد زیاد شود، مگر این که در سیستم جبران شده حذف صفر – قطب رخ دهد.



$$G_c(s) = K_c \frac{\beta}{\gamma} \frac{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}{\left(\frac{T_1}{\gamma} s + 1\right)(\beta T_2 s + 1)} = K_c \left(\frac{s + \frac{1}{T_1}}{s + \frac{\gamma}{T_1}} \right) \left(\frac{s + \frac{1}{T_2}}{s + \frac{1}{\beta T_2}} \right)$$

که در آن $\beta > 1$ و $\gamma > 1$ (K_c) را به بخش پیشفاز جبران ساز نسبت می دهیم.

در طراحی جبران سازهای پسفاز – پیشفاز دو حالت $\gamma \neq \beta$ و $\gamma = \beta$ را جدا در نظر می گیریم.

حالت ۱. $\gamma \neq \beta$

۱. با توجه به مشخصه خواسته شده محل مطلوب قطبهای حلقه بسته مطلوب را تعیین کنید .
۲. با توجه به تابع تبدیل حلقه باز $G(s)$ کمبود فاز ϕ برای قرار گرفتن قطبهای حلقه بسته در محل مطلوب را بیابید. بخش پیشفاز جبران ساز پسفاز - پیشفاز باید این زاویه ϕ را ایجاد کند.

۳. با فرض این که بعداً T_r را آنقدر بزرگ انتخاب می کنیم که اندازه بخش پسفاز، یعنی

$$\left| \frac{s_1 + (1/T_r)}{s_1 + (1/\beta T_r)} \right|$$

در $s = s_1$ (محل قطب غالب حلقه بسته مطلوب) تقریباً یک باشد، مقادیر T_1 و γ را طوری برمی گزینیم که داشته باشیم

$$\left| \frac{s_1 + (1/T_1)}{s_1 + (\gamma/T_1)} \right| = \phi$$

T_1 و γ به طور یکتا تعیین نمی شوند. (یعنی بی نهایت T_1 و γ این شرط را برآورده می کند.) سپس مقدار K_c را با توجه به شرط اندازه تعیین می کنیم :

$$\left| K_c \frac{s_1 + (1/T_1)}{s_1 + (\gamma/T_1)} G(s_1) \right| = 1$$

۴. اگر ثابت خطای ایستای سرعت K_v مشخص شده باشد، β را به نحوی تعیین کنید که خواسته مربوط به K_v تأمین شود. ثابت خطای ایستای سرعت K_v عبارت است از

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s G_c(s) G(s)$$

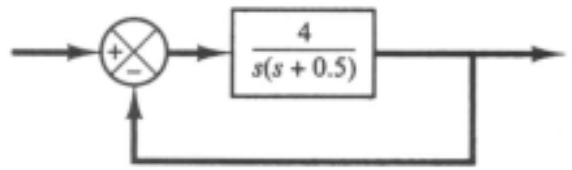
$$= \lim_{s \rightarrow 0} s K_c \left(\frac{s + \frac{1}{T_1}}{s + \frac{\gamma}{T_1}} \right) \left(\frac{s + \frac{1}{T_r}}{s + \frac{1}{\beta T_r}} \right) G(s)$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} s K_c \frac{\beta}{\gamma} G(s)$$

سپس با توجه به β به دست آمده، مقدار T_r را به نحوی تعیین کنید که داشته باشیم

$$\left| \frac{s_1 + (1/T_r)}{s_1 + (1/\beta T_r)} \right| = 1$$

$$5^\circ < \frac{s_1 + (1/T_r)}{s_1 + (1/\beta T_r)} < 90^\circ$$

	قطبهای حلقه بسته این سیستم عبارت است از $s = -0.2500 \pm j1.9843$ نسبت میرایی 0.125، فرکانس طبیعی نامیرا 2 rad/s ثابت خطای ایستای سرعت $8s^{-1}$
می‌خواهیم نسبت میرایی قطبهای حلقه بسته غالب را به حدود 0.5، فرکانس طبیعی نامیرا را به 5 rad/s و ثابت خطای ایستای سرعت را به $8s^{-1}$ برسانیم. جبران‌ساز مناسبی برای دستیابی به تمام این مشخصه‌های عملکرد طرح کنید.	

جبران‌ساز پسفاز - پیشفازی با تابع تبدیل زیر به کار می‌بریم

$$G_c(s) = K_c \left(\frac{s + \frac{1}{T_1}}{s + \frac{\gamma}{T_1}} \right) \left(\frac{s + \frac{1}{T_r}}{s + \frac{1}{\beta T_r}} \right) \quad (\gamma > 1, \beta > 1)$$

قطبهای حلقه بسته غالب باید با توجه به مشخصه‌های عملکرد در محلهای زیر قرار داشته باشد

$$s = -2.50 \pm j4.33$$

$$\left| \frac{4}{s(s + 0.5)} \right|_{s = -2.50 + j4.33} = -235^\circ$$

بخش پیشفاز جبران‌ساز باید 55° به این زاویه اضافه کند

صفر را در $s = -0.5$ قرار می‌دهیم تا قطب واقع در $s = -0.5$ وسیله تحت کنترل خنثی شود

تحلیل ترسیمی درمی یابیم که قطب باید در $s = -0.5$ قرار داشته باشد

$$K_c \frac{s + (1/T_1)}{s + (\gamma/T_1)} = K_c \frac{s + 0.5}{s + 0.5}$$

$$\gamma = \frac{0.5}{0.5} = 1.0 \quad , \quad T_1 = 2$$

$$\left| K_c \frac{2(s + 0.5)}{(s + 0.5)s} \right|_{s = -2.5 + j2.33} = 1$$

$$K_c = \left| \frac{(s + 0.5)s}{2} \right|_{s = -2.5 + j2.33} = 6.26$$

$$\begin{aligned} K_v &= \lim_{s \rightarrow 0} s G_c(s) G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s K_c \frac{\beta}{\gamma} G(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s (6.26) \frac{\beta}{1.0} \frac{2}{s(s + 0.5)} = 24.8 \beta = 1.0 \end{aligned}$$

$$\beta = 0.04$$

$$\left| \frac{s + (1/T_1)}{s + [1/(0.04 T_1)]} \right|_{s = -2.5 + j2.33} = 1 \quad , \quad -5^\circ < \left| \frac{s + (1/T_1)}{s + (16.0 T_1)} \right|_{s = -2.5 + j2.33} < 0^\circ$$

به ازای $T_1 = 5$ داریم

$$0^\circ < \text{زاویه} < -2.10^\circ \quad 0.98 > \text{اندازه} > 1$$

بنابراین تابع تبدیل جبران‌ساز پ‌س‌فاز - پیش‌فاز به صورت زیر تعیین می‌شود

$$G_c(s) = 6.26 \left[\frac{s + (1/2)}{s + (10/0.4/2)} \right] \left[\frac{s + (1/5)}{s + [1/(16/0.4 \times 5)]} \right]$$

$$= 6.26 \left(\frac{s + 0.5}{s + 5.02} \right) \left(\frac{s + 0.2}{s + 0.01247} \right)$$

$$= \frac{10(2s+1)(5s+1)}{(0.1992s+1)(80.19s+1)}$$

تابع تبدیل حلقه باز سیستم جبران شده به صورت زیر است

$$G_c(s) G(s) = \frac{250.4(s+0.2)}{s(s+5.02)(s+0.01247)}$$

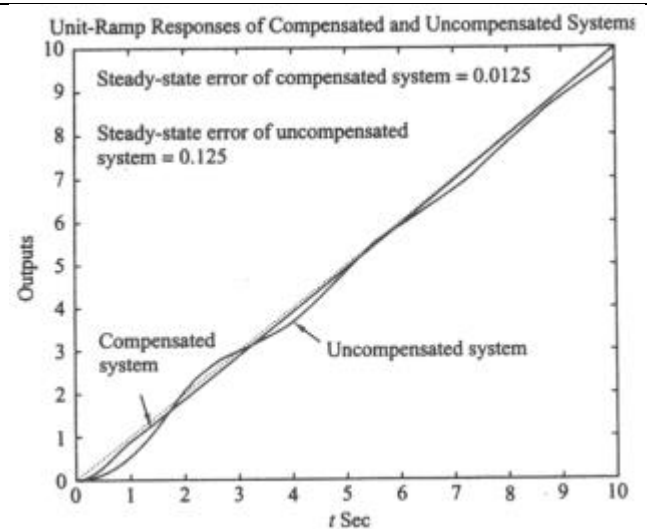
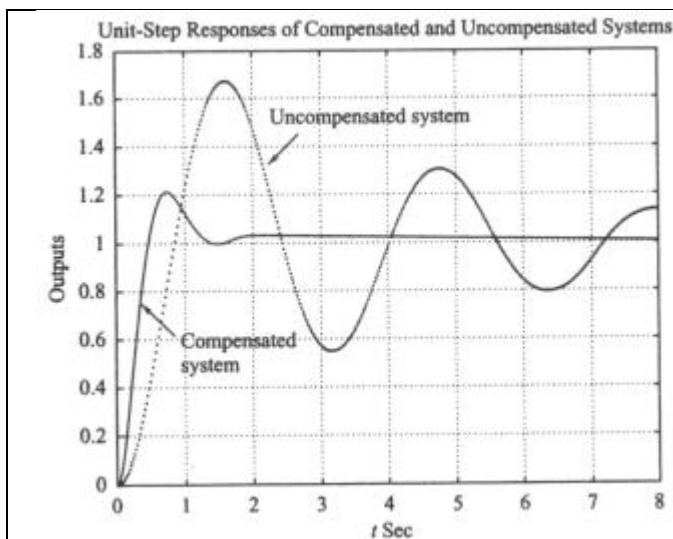
$$s^3 + 5.0325s^2 + 250.1026s + 50.08$$

$$= (s + 2.4123 + j4.2756)(s + 2.4123 - j4.2756)(s + 0.2078) = 0$$

$$s = -2.4123 \pm j4.2756$$

$$s = -0.2078$$

نسبت میرایی جدید $\zeta = 0.491$



حالت ۲. $\gamma = \beta$

۱. با توجه به مشخصات عملکرد داده شده، محل مطلوب قطبهای حلقه بسته غالب را تعیین کنید

۲. جبرانساز پسفاز - پیشفاز بیان شده با معادله

$$G_c(s) = K_c \frac{(T_1 s + 1)(T_r s + 1)}{\left(\frac{T_1}{\beta} s + 1\right)(\beta T_r s + 1)} = K_c \frac{\left(s + \frac{1}{T_1}\right)\left(s + \frac{1}{T_r}\right)}{\left(s + \frac{\beta}{T_1}\right)\left(s + \frac{1}{\beta T_r}\right)}$$

که در آن $\beta > 1$.

$$\begin{aligned} K_v &= \lim_{s \rightarrow 0} s G_c(s) G(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s K_c G(s) \end{aligned}$$

۳. برای قرار گرفتن قطبهای حلقه بسته غالب در محل مطلوب، زاویه ϕ لازمی را که بخش پیشفاز جبرانساز باید ایجاد کند، تعیین کنید.

۴. برای جبرانساز پسفاز - پیشفاز T_r را به حد کافی بزرگ برمی‌گزینیم، طوری که

$$\left| \frac{s_1 + \frac{1}{T_r}}{s_1 + \frac{1}{\beta T_r}} \right|$$

تقریباً یک باشد، $s = s_1$ محل یکی از قطبهای حلقه بسته غالب است. مقادیر T_1 و γ را با توجه به شرایط اندازه و زاویه تعیین می‌کنیم

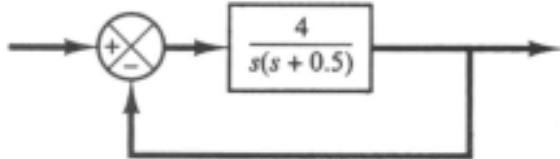
$$\left| K_c \left(\frac{s_1 + \frac{1}{T_1}}{s_1 + \frac{\beta}{T_1}} \right) G(s_1) \right| = 1$$

$$\left| \frac{s_1 + \frac{1}{T_1}}{s_1 + \frac{\beta}{T_1}} \right| = \phi$$

۵. با استفاده از β به دست آمده، T_r را طوری تعیین کنید که

$$\left| \frac{s_1 + \frac{1}{T_r}}{s_1 + \frac{1}{\beta T_r}} \right| \approx 1$$

$$-5^\circ < \left| \frac{s_1 + (1/T_r)}{s_1 + (1/\beta T_r)} \right| < 5^\circ$$



قطبهای حلقه بسته این سیستم عبارت است از

$$s = -0.25 \pm j1.9843$$

نسبت میرایی ۰٫۱۲۵، فرکانس طبیعی نامیرا ۲ rad/s

ثابت خطای ایستای سرعت $8s^{-1}$

می‌خواهیم نسبت میرایی قطبهای حلقه بسته غالب را به حدود ۰٫۵ فرکانس طبیعی نامیرا را به ۵ rad/s و ثابت خطای ایستای سرعت را به $8s^{-1}$ برسانیم. جبرانسان مناسبی برای دستیابی به تمام این مشخصه‌های عملکرد طرح کنید.

$$G_c(s) = K_c \frac{\left(s + \frac{1}{T_1}\right) \left(s + \frac{1}{T_r}\right)}{\left(s + \frac{\beta}{T_1}\right) \left(s + \frac{1}{\beta T_r}\right)} \quad (\beta > 1)$$

قطبهای حلقه بسته غالب باید با توجه به مشخصه‌های عملکرد در محلهای زیر قرار داشته باشد

$$s = -2.5 \pm j4.33$$

تابع تبدیل حلقه باز سیستم جبران شده عبارت است از

$$G_c(s) G(s) = K_c \frac{(s + 1/T_1)(s + 1/T_r)}{\left(s + \frac{\beta}{T_1}\right) \left(s + \frac{1}{\beta T_r}\right)} \cdot \frac{4}{s(s + 0.5)}$$

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s G_c(s) G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} K_c \frac{4}{0.5} = 8 K_c = 80$$

$$K_c = 10$$

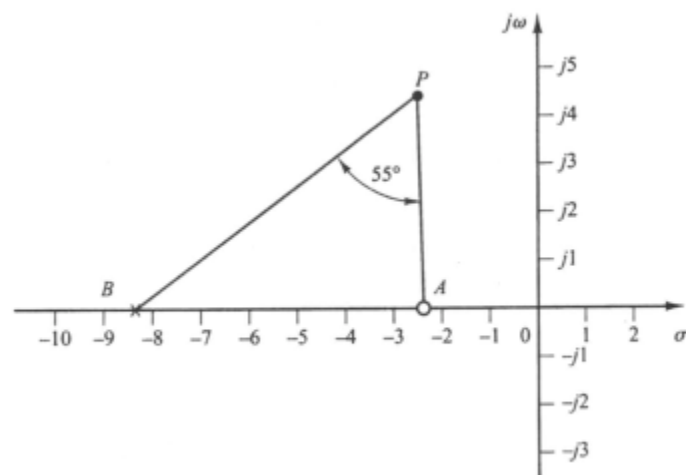
$$\left| \frac{4}{s(s + 0.5)} \right|_{s = -2.5 + j2.33} = -235^\circ$$

بخش پیشفاز جبران‌ساز باید 55° به این زاویه اضافه کند

ثابت زمانی T_1 و β از معادلات زیر به دست می‌آیند

$$\left| \frac{s + \frac{1}{T_1}}{s + \frac{\beta}{T_1}} \right|_{s = -2.5 + j2.33} \left| \frac{40}{s(s + 0.5)} \right|_{s = -2.5 + j2.33} = \left| \frac{s + \frac{1}{T_1}}{s + \frac{\beta}{T_1}} \right|_{s = -2.5 + j2.33} \frac{8}{4.77} = 1$$

$$\left| \frac{s + \frac{1}{T_1}}{s + \frac{\beta}{T_1}} \right|_{s = -2.5 + j2.33} = 55^\circ$$



$$T_1 = \frac{1}{2.38} = 0.420, \quad \beta = 8.34 \quad T_1 = 2.503$$

پس بخش پیشفاز شبکهٔ پسفاز - پیشفاز عبارت است از

$$10 \left(\frac{s+2,38}{s+8,34} \right)$$

برای بخش پسفاز جبران‌ساز باید T_r را طوری برگزینیم که داشته باشیم

$$\left| \frac{s + \frac{1}{T_r}}{s + \frac{1}{3,503 T_r}} \right|_{s=-2,5 + j4,33} = 1, \quad -5^\circ < \angle \left| \frac{s + \frac{1}{T_r}}{s + \frac{1}{3,503 T_r}} \right|_{s=-2,5 + j4,33} < 0^\circ$$

پس از چند محاسبهٔ ساده می‌بینیم که به ازای $T_r = 5$ داریم

$$0^\circ < \text{زاویه} < -1,5^\circ \quad 0,98 > \text{اندازه} > 1$$

و به ازای $T_r = 10$ داریم

$$0^\circ < \text{زاویه} < -1,0^\circ \quad 0,99 > \text{اندازه} > 1$$

انتخاب می‌کنیم $T_r = 10$

$$\frac{1}{\beta T_r} = \frac{1}{3,503 \times 10} = 0,0285$$

و تابع تبدیل جبران‌ساز پسفاز - پیشفاز را به صورت زیر می‌یابیم

$$G_c(s) = 10 \left(\frac{s+2,38}{s+8,34} \right) \left(\frac{s+0,1}{s+0,0285} \right)$$

تابع تبدیل حلقه باز سیستم جبران شده عبارت است از

$$G_c(s) G(s) = \frac{40(s+2,38)(s+0,1)}{(s+8,34)(s+0,0285)s(s+0,5)}$$

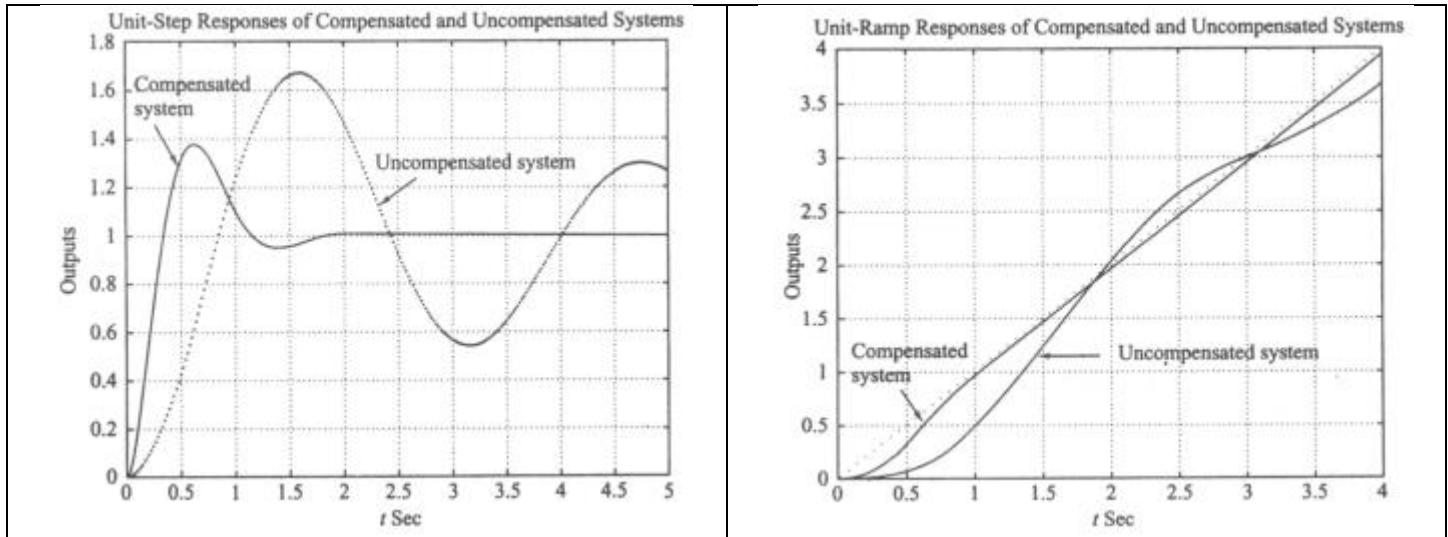
$$\begin{aligned} & s^4 + 1,8685s^3 + 44,4219s^2 + 99,3188s + 9,52 \\ & = (s+2,4539 + j4,3099)(s+2,4539 - j4,3099)(s+0,1003)(s+3,8604) = 0 \end{aligned}$$

قطبهای غالب حلقه بسته در محل قرار دارند

$$s = -2.4539 \pm j4.3099$$

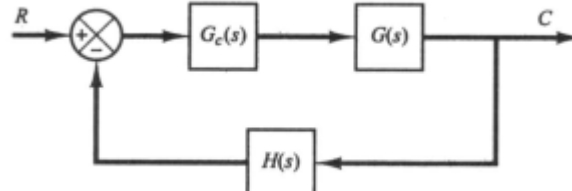
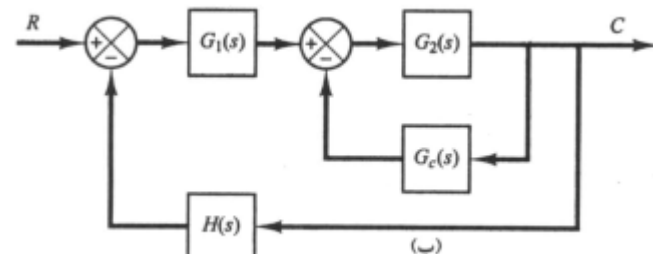
دو قطب دیگر در محلهای زیر واقعاند

$$s = -0.1003, \quad s = -3.8604$$

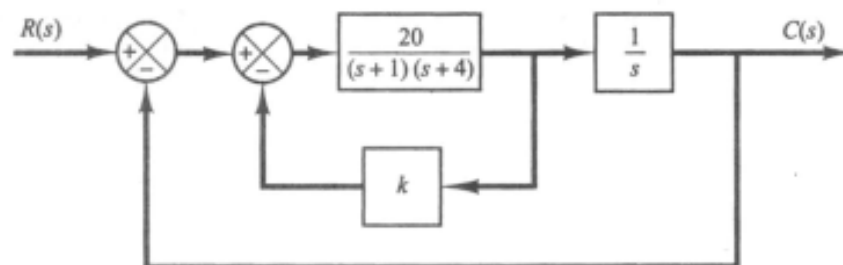


فراجش ماکزیمم پاسخ پله سیستم تقریباً ۳۸٪ است. (این خیلی بزرگتر از فراجش ۲۱٪ مثال طراحی ۸-۶ است.) اگر مانند این مثال بخواهیم $\gamma = \beta$ ، نمی‌توانیم ماکزیمم فراجش را از ۳۸٪ خیلی کمتر کنیم و مثلاً آن را به حد ۲۰٪ برسانیم. توجه کنید که اگر شرط $\gamma = \beta$ در کار نباشد، یک پارامتر دیگر در اختیار طراح قرار دارد و می‌تواند فراجش ماکزیمم را کاهش دهد.

جبرانسازی موازی

	
$\frac{C}{R} = \frac{G_c G}{1 + G_c G H}$ $1 + G_c G H = 0$	$\frac{C}{R} = \frac{G_1 G_2}{1 + G_2 G_c + G_1 G_2 H}$ $1 + G_1 G_2 H + G_2 G_c = 0$
چون G_f یک تابع تبدیل مشخص است، طراحی G_c همانند طراحی جبرانساز سری است	$1 + \frac{G_c G_2}{1 + G_1 G_2 H} = 0$ $G_f = \frac{G_2}{1 + G_1 G_2 H}$ $1 + G_c G_f = 0$

مثال:



مقدار k را به نحوی تعیین کنید که نسبت میرایی قطبهای غالب حلقه بسته ۰/۴ باشد.

فیدبک سرعت (فیدبک تاکومتری)

$$\frac{\Upsilon_o}{s(s+1)(s+\Upsilon)+\Upsilon_o(1+ks)}$$

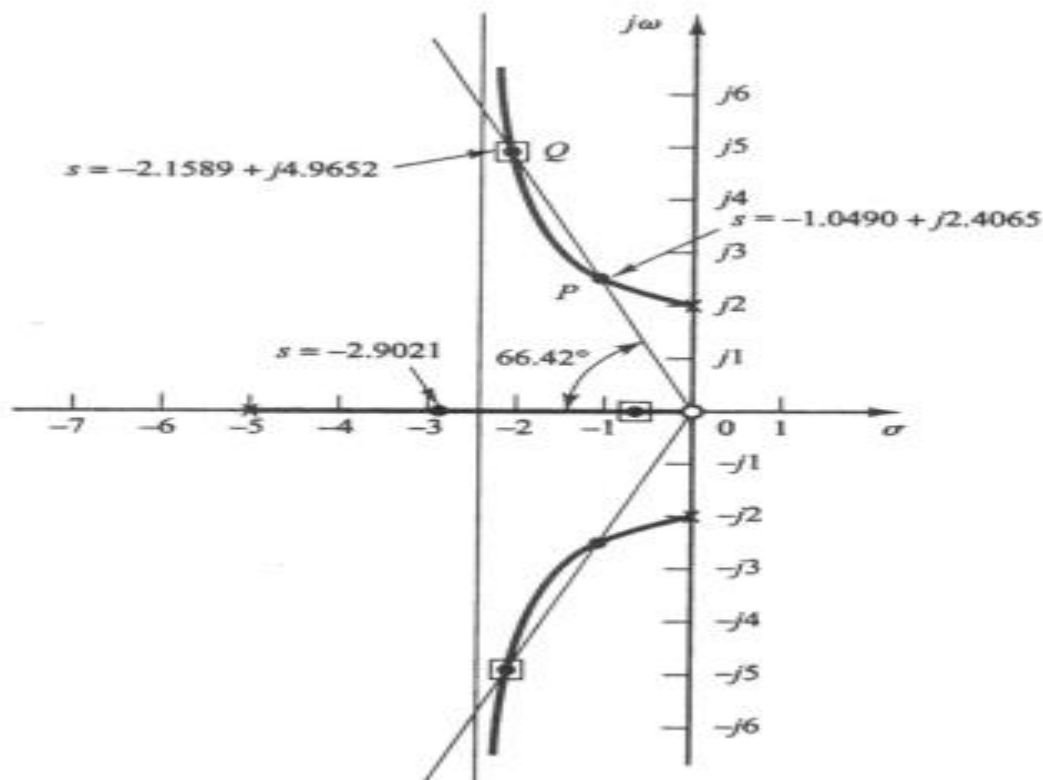
$$s^3 + \Omega s^2 + \Upsilon s + \Upsilon_o ks + \Upsilon_o = 0$$

$$\Upsilon_o k = K$$

$$s^3 + \Omega s^2 + \Upsilon s + Ks + \Upsilon_o = 0$$

$$1 + \frac{Ks}{s^3 + \Omega s^2 + \Upsilon s + \Upsilon_o} = 0$$

$$1 + \frac{Ks}{(s+j\Upsilon)(s-j\Upsilon)(s+\Omega)} = 0$$



قطبهای حلقه بسته دارای $\zeta = 0.4$ باید روی خطی قرار گیرند که از مبدأ می‌گذرد و با بخش منفی محور حقیقی زاویه $\pm 66.42^\circ$ می‌سازد. در این مثال خط راستی با زاویه 66.42° در دو نقطه شاخه بالایی مکان هندسی ریشه‌ها را قطع می‌کند. پس نسبت میرایی ζ قطبهای حلقه بسته به ازای دو مقدار K برابر 0.4 می‌شود. در نقطه P مقدار K عبارت است از

$$K = \left| \frac{(s+2)(s-2)(s+5)}{s} \right|_{s=-1.0490+j2.4065} = 8.9801$$

$$k = \frac{K}{20} = 0.4490 \quad \text{در نقطه } P$$

در نقطه Q مقدار K به صورت زیر به دست می‌آید

$$K = \left| \frac{(s+2)(s-2)(s+5)}{s} \right|_{s=-2.1589+j4.9652} = 28.260$$

پس

$$k = \frac{K}{20} = 1.4130 \quad \text{در نقطه } Q$$

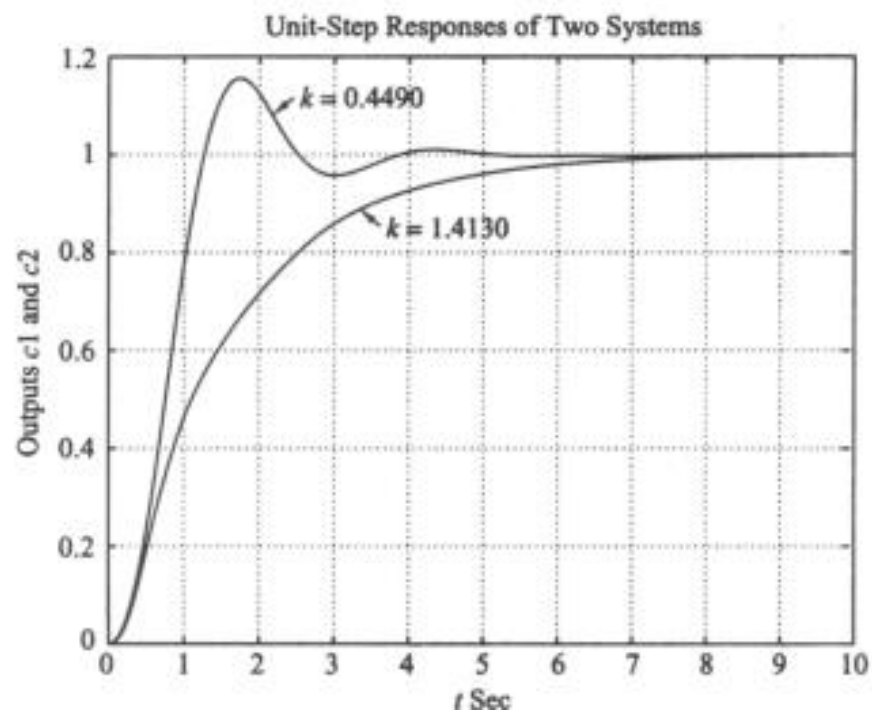
پس این مسئله دو جواب دارد. به ازای $k = 0.4490$ سه قطب حلقه بسته عبارت‌اند از

$$s = -2.9021, \quad s = -1.0490 + j2.4065, \quad s = -1.0490 - j2.4065$$

به ازای $k = 1.4130$ سه قطب حلقه بسته عبارت‌اند از

$$s = -2.1589 + j4.9652, \quad s = -2.1589 - j4.9652, \quad s = -0.6823$$

توجه کنید که سیستم $k = 0.4490$ یک زوج قطب حلقه بسته غالب دارد، ولی در سیستم با $k = 1.4130$ قطب حلقه بسته $s = 0.6823$ غالب است، نه قطبهای مزدوج مختلط. در این حالت مشخصه پاسخ عمدتاً توسط قطب حقیقی تعیین می‌شود.



سیستم با $k = 0.4490$ (که پاسخی سریعتر با فراجهش نسبتاً کوچک دارد) مشخصه پاسخ بسیار بهتری نسبت به سیستم دارای $k = 1.4130$ (با پاسخی کند و فرامیرا) دارد. پس برای این سیستم $k = 0.4490$ را برمی‌گزینیم.