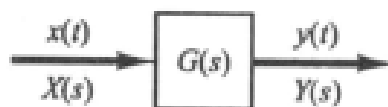


سیستمهای کنترل به روش پاسخ فرکانسی

منظور از پاسخ فرکانسی پاسخ حالت ماندگار سیستم به ورودی سینوسی است. در روشهای پاسخ فرکانسی، فرکانس سیگنال ورودی را در گستره فرکانسی خاصی تغییر داده، پاسخ حاصل را بررسی می‌کنیم.

در واقع رهیافت‌های پاسخ فرکانسی و مکان هندسی ریشه‌ها مکمل هم هستند. یکی از مزایای رهیافت پاسخ فرکانسی این است که می‌توانیم از داده‌های کسب شده از اندازه‌گیری سیستم فیزیکی استفاده کنیم، بدون این که نیازی به ساخت مدل ریاضی سیستم داشته باشیم. در بسیاری از طراحی‌های سیستمهای کنترل هر دو رهیافت به کار می‌رود. مهندس کنترل باید با هر دو روش آشنا باشد.

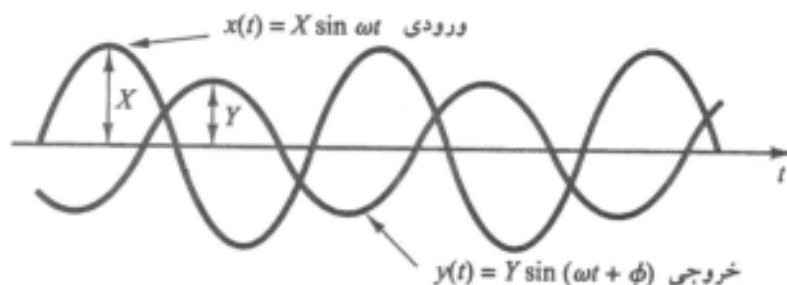
یافتن خروجی حالت ماندگار به ورودی سینوسی. نشان خواهیم داد که خروجی حالت ماندگار یک تابع تبدیل را می‌توان مستقیماً از تابع تبدیل سینوسی آن به دست آورد؛ منظور از تابع تبدیل سینوسی تابع تبدیلی بر حسب $j\omega$ به جای s است، که ω فرکانس است.



سیستم پایدار، خطی، و مستقل از زمان.

سیستم خطی مستقل از زمان شکل ۷-۱ را در نظر بگیرید. ورودی و خروجی این سیستم که تابع تبدیل آن $G(s)$ است، به ترتیب با $x(t)$ و $y(t)$ مشخص شده‌اند. اگر یک سیگنال سینوسی باشد، خروجی حالت ماندگار نیز یک سینوسی با همان فرکانس است، ولی دامنه و فاز آن می‌تواند متفاوت باشد. فرض کنید سیگنال ورودی به صورت زیر است

$$x(t) = X \sin \omega t$$



چون $G(j\omega)$ یک کمیت مختلط است، می‌توان آن را به صورت زیر نوشت

$$G(j\omega) = |G(j\omega)| e^{j\phi}$$

که در آن $|G(j\omega)|$ اندازه و ϕ زاویه فاز $G(j\omega)$ است؛ یعنی

$$\phi = \angle G(j\omega) = \tan^{-1} \left[\frac{\text{بخش موهومی } G(j\omega)}{\text{بخش حقیقی } G(j\omega)} \right]$$

زاویه فاز منفی را پسفازی و زاویه فاز مثبت را پیشفازی می‌نامند.

سیستم شکل ۷-۳ را در نظر بگیرید. تابع تبدیل $G(s)$ عبارت است از

$$G(s) = \frac{K}{Ts + 1}$$

خروجی حالت ماندگار $y_{ss}(t)$ را به ازای ورودی سینوسی $x(t) = X \sin \omega t$ بیابید.

به جای s در $G(s)$ قرار می‌دهیم $j\omega$ و به دست می‌آوریم

$$G(j\omega) = \frac{K}{jT\omega + 1}$$

نسبت دامنه خروجی به ورودی برابر است با

$$|G(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{1 + T^2 \omega^2}}$$

و زاویه فاز عبارت است از

$$\phi = \angle G(j\omega) = -\tan^{-1} T\omega$$

$$y_{ss}(t) = \frac{X K}{\sqrt{1 + T^2 \omega^2}} \sin(\omega t - \tan^{-1} T\omega)$$

با توجه به معادله (۷-۶) می‌بینیم که به ازای ω کوچک، دامنه خروجی حالت ماندگار $y_{ss}(t)$ تقریباً K برابر دامنه ورودی است. تغییر فاز نیز به ازای ω کوچک کم است. به ازای ω بزرگ دامنه خروجی کوچک است و تقریباً با ω نسبت عکس دارد. با گراییدن ω به بینهایت زاویه فاز به -90° میل می‌کند. این شبکه پسفاز است.

شبکه توصیف شده به صورت زیر را در نظر بگیرید.

$$G(s) = \frac{s + \frac{1}{T_1}}{s + \frac{1}{T_2}}$$

پیشفاز یا پسفاز بودن شبکه را تعیین کنید.

$$G(j\omega) = \frac{j\omega + (1/T_1)}{j\omega + (1/T_2)} = \frac{T_2(1 + T_1 j\omega)}{T_1(1 + T_2 j\omega)}$$

$$|G(j\omega)| = \frac{T_2 \sqrt{1 + T_1^2 \omega^2}}{T_1 \sqrt{1 + T_2^2 \omega^2}}$$

$$\phi = \angle G(j\omega) = \tan^{-1} T_1 \omega - \tan^{-1} T_2 \omega$$

$$y_{ss}(t) = \frac{X T_2 \sqrt{1 + T_1^2 \omega^2}}{T_1 \sqrt{1 + T_2^2 \omega^2}} \sin(\omega t + \tan^{-1} T_1 \omega - \tan^{-1} T_2 \omega)$$

با توجه به این عبارت می‌بینیم که اگر $T_1 > T_2$ ، آنگاه $\tan^{-1} T_1 \omega - \tan^{-1} T_2 \omega > 0$. پس این شبکه به ازای $T_1 > T_2$ یک شبکه پیشفاز است. به ازای $T_1 < T_2$ شبکه یک شبکه پسفاز است.

نمایش تصویری مشخصات پاسخ فرکانسی.

۱. نمودار بode یا نمودار لگاریتمی
۲. نمودار نایکویست یا نمودار قطبی
۳. نمودار لگاریتم دامنه بر حسب فاز (نمودار نیکولس)

نمودار بوده یا نمودار لگاریتمی. یک تابع تبدیل سینوسی را می‌توان با دو نمودار مجزا نمایش داد: یک نمودار تغییرات دامنه تابع تبدیل سینوسی برحسب فرکانس، و دیگری زاویه فاز (با واحد درجه) را برحسب فرکانس نشان می‌دهد. هر دو منحنی برحسب لگاریتم فرکانس رسم می‌شوند.

بیان استاندارد لگاریتم دامنه $G(j\omega)$ ، $20 \log |G(j\omega)|$ است که در آن لگاریتم در پایه ۱۰ محاسبه می‌شود. واحد این بیان دسیبل، با علامت اختصاری dB است. در نمایش لگاریتمی، منحنی‌ها روی کاغذ نیم‌لگاریتمی رسم می‌شود، مقیاس لگاریتمی برای فرکانس و مقیاس خطی برای دامنه (برحسب دسیبل) یا فاز (برحسب درجه) به کار می‌رود. (گستره فرکانسی مورد نیاز تعداد دهه‌های محور افقی را تعیین می‌کند).

مزیت اصلی استفاده از نمودار بوده این است که ضرب دامنه‌ها به جمع تبدیل می‌شود. به علاوه روش ساده‌ای برای رسم تقریبی منحنی‌های لگاریتم دامنه وجود دارد. اساس این روش تقریب مجانبی است. تقریب با استفاده از مجانب‌های راست در مواردی که تنها اطلاعات تقریبی مشخصات پاسخ فرکانسی لازم است، تقریب خوبی است. هر گاه منحنی دقیقتری لازم باشد می‌توان منحنی رسم شده براساس این مجانب‌ها را تصحیح کرد. منحنی‌های زاویه فاز را می‌توان تنها با داشتن الگوی منحنی فاز رسم کرد. استفاده از مقیاس لگاریتمی برای فرکانس به خاطر باز شدن ناحیه فرکانس‌های پایین بسیار مهم است، زیرا برای اکثر سیستم‌های عملی مشخصات فرکانس پایین بسیار مهم هستند. این که به خاطر لگاریتمی بودن فرکانس نمی‌توان منحنی‌ها را تا فرکانس صفر رسم کرد ($\log 0 = -\infty$) مشکلی جدی ایجاد نمی‌کند.

عوامل پایه‌ای $G(j\omega)H(j\omega)$. چنانچه قبلاً گفتیم مزیت اصلی نمودار لگاریتمی سادگی نسبی ترسیم منحنی‌های پاسخ فرکانسی است. عوامل پایه موجود در یک تابع تبدیل دلخواه $G(j\omega)H(j\omega)$ عبارت‌اند از:

۱. بهره K

۲. عوامل مشتقگیری و انتگرالگیری $(j\omega)^{\mp 1}$

۳. عوامل مرتبه $(1 + j\omega T)^{\mp 1}$

۴. عوامل مرتبه دوم $[1 + 2\zeta(j\omega/\omega_n) + (j\omega/\omega_n)^2]^{\mp 1}$

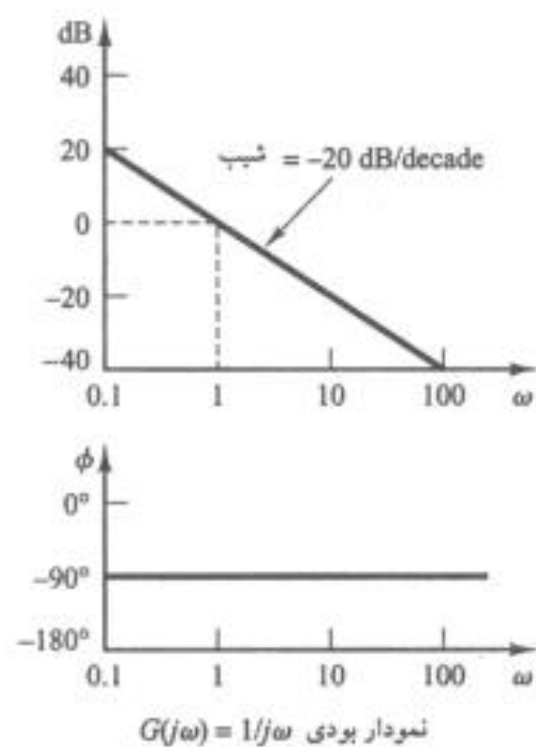
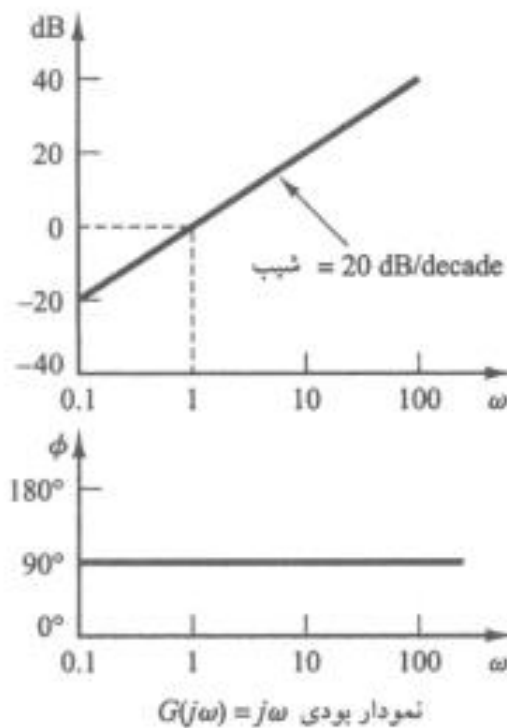
بهره K . برحسب دسیبل، اعداد بزرگتر از یک مثبت و اعداد کوچکتر از یک منفی هستند. منحنی لگاریتم اندازه بهره ثابت K ، خطی افقی با اندازه $20 \log K$ دسیبل است. زاویه فاز بهره K صفر است. اثر تغییر بهره K در تابع تبدیل، بالا و پایین بردن منحنی لگاریتم دامنه به اندازه‌ای ثابت است، ولی بر منحنی فاز اثری ندارد.

عوامل مشتقگیری و انتگرالگیری $(j\omega)^{\mp 1}$. لگاریتم دامنه $1/j\omega$ برحسب دسیبل عبارت است از

$$20 \log \left| \frac{1}{j\omega} \right| = -20 \log \omega \text{ dB}$$

زاویه فاز $1/j\omega$ ثابت و برابر -90° است.

در نمودارهای بوده ، نسبتهای فرکانسی برحسب اکتاو یا دهه بیان می‌شوند. اکتاو فاصله فرکانسی ω_1 تا $2\omega_1$ است، که ω_1 می‌تواند هر فرکانسی باشد. دهه فاصله فرکانسی ω_1 تا $10\omega_1$ است ؛ باز هم ω_1 می‌تواند هر فرکانسی باشد، (در مقیاس لگاریتمی کاغذ نیم‌لگاریتمی هر نسبت فرکانسی با فاصله افقی یکسانی متناظر است. برای مثال فاصله افقی $\omega=1$ تا $\omega=10$ برابر فاصله افقی $\omega=3$ تا $\omega=30$ است.)



شیب این خط راست -20 dB/dec (بخوانید منهای ۲۰ dB بر دهه) یا -6 dB/oct (بخوانید منهای ۶ dB بر اکتاو) است.

اگر تابع تبدیل دارای عوامل $(1/j\omega)^n$ یا $(j\omega)^n$ باشد، لگاریتم دامنه به ترتیب عبارت است از

$$20 \log \left| \frac{1}{(j\omega)^n} \right| = -n \times 20 \log |j\omega| = -20n \log \omega \text{ dB}$$

$$20 \log |(j\omega)^n| = n \times 20 \log |j\omega| = 20n \log \omega \text{ dB}$$

پس شیب منحنی‌های لگاریتم دامنه عوامل $(1/j\omega)^n$ و $(j\omega)^n$ به ترتیب $-20n \text{ dB/dec}$ و $20n \text{ dB/dec}$ است. در تمام گستره فرکانسی زاویه فاز $(1/j\omega)^n$ برابر $-90^\circ \times n$ و زاویه فاز $(j\omega)^n$ برابر $90^\circ \times n$ است. منحنی‌های دامنه از نقطه $(\omega=1, 0 \text{ dB})$ می‌گذرند.

عامل مرتبه اول $(1 + j\omega T)^{-1}$. لگاریتم دامنه عامل مرتبه اول $1/(1 + j\omega T)$ عبارت است از

$$20 \log \left| \frac{1}{1 + j\omega T} \right| = -20 \log \sqrt{1 + \omega^2 T^2} \text{ dB}$$

در فرکانسهای پایین، یعنی فرکانسهایی که برایشان $\omega \ll 1/T$ ، لگاریتم دامنه را می‌توان به صورت زیر تقریب زد

$$-20 \log \sqrt{1 + \omega^2 T^2} = -20 \log 1 = 0 \text{ dB}$$

پس منحنی لگاریتم دامنه در فرکانسهای پایین خط راست 0 dB است. در فرکانسهای بالا که برایشان $\omega \gg 1/T$

$$-20 \log \sqrt{1 + \omega^2 T^2} = -20 \log \omega T \text{ dB}$$

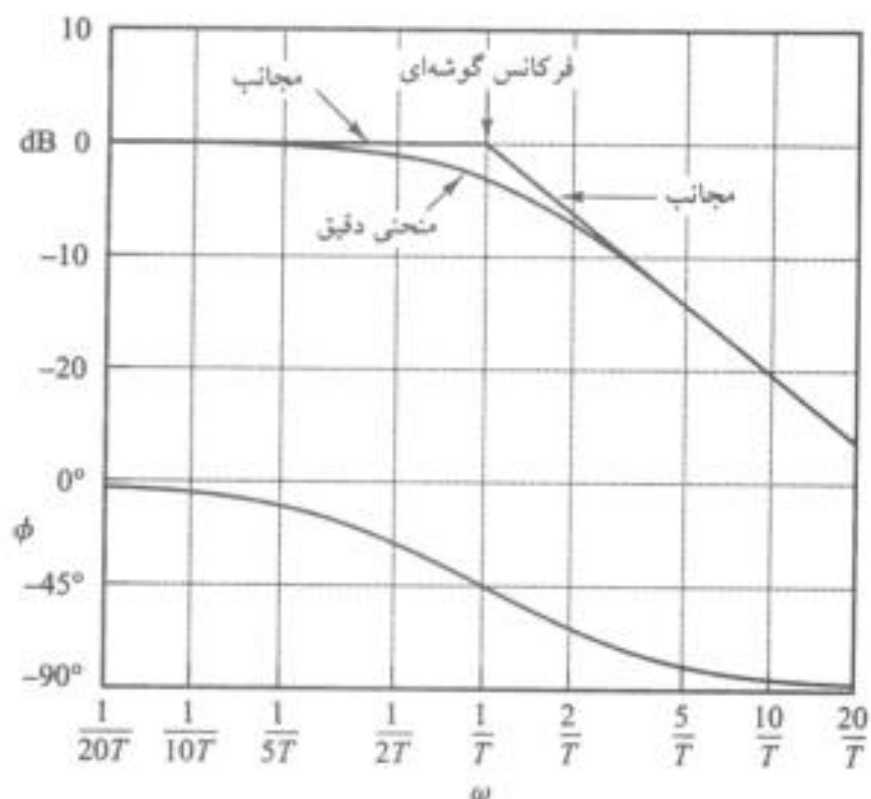
این عبارت تقریبی گستره فرکانس بالا است. در $\omega = 1/T$ این منحنی مقدار 0 dB را به دست می‌دهد و در $\omega = 10/T$ مقدار 20 dB- را. پس مقدار 20 dB- $-20 \log \omega T$ با هر دهه افزایش ω به اندازه 20 dB کم می‌شود. پس در $\omega \gg 1/T$ منحنی لگاریتم دامنه خط راستی با شیب 20 dB/dec- (یا 6 dB/oct-) است. تحلیل بالا نشان می‌دهد که منحنی پاسخ فرکانسی عامل $1/(1 + j\omega T)$ را می‌توان با دو مجانب تقریب زد. یک مجانب خط راست 0 dB در گستره فرکانسی $0 < \omega < 1/T$ است، و دیگری خط راستی با شیب 20 dB/dec- در گستره فرکانسی $1/T < \omega < \infty$. منحنی دقیق لگاریتم دامنه، مجانبها و منحنی فاز در شکل ۷-۶ نشان داده شده است.

مقدار دقیق زاویه فاز ϕ عامل $1/(1 + j\omega T)$ عبارت است از

$$\phi = -\tan^{-1} \omega T$$

در فرکانس صفر زاویه فاز 0° است. در فرکانس گوشه‌ای زاویه فاز عبارت است

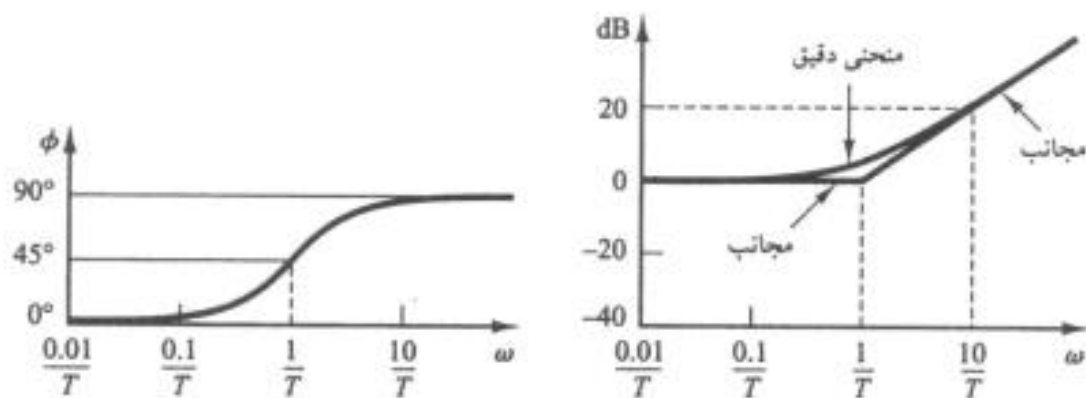
$$\phi = -\tan^{-1} \frac{T}{T} = -\tan^{-1} 1 = -45^\circ$$



پس خطا در یک اکتاو پایین‌تر یا بالاتر از فرکانس گوشه‌ای تقریباً -1 dB است.
خطا در یک دهه بالاتر یا پایین‌تر از فرکانس گوشه‌ای تقریباً -0.4 dB است

توجه کنید که تغییر ثابت زمانی T باعث جابه‌جا شدن فرکانس گوشه‌ای می‌شود، ولی شکل‌های منحنی لگاریتم دامنه و زاویه فاز بی‌تغییر می‌ماند.

تابع تبدیل $1/(1+j\omega T)$ مشخصات یک فیلتر پایین گذر را دارد. در فرکانسهای بزرگتر از $\omega = 1/T$ لگاریتم دامنه به سرعت به سمت $-\infty$ افت می‌کند. این افت عمدتاً از ثابت زمانی ناشی می‌شود. در فیلتر پایین گذر خروجی می‌تواند به خوبی ورودی سینوسی فرکانس پایین را دنبال کند. ولی با افزایش فرکانس ورودی، خروجی نمی‌تواند ورودی را دنبال کند، زیرا خروجی برای رسیدن به دامنه مطلوب به زمان نیاز دارد. در فرکانسهای بالا دامنه به سمت صفر و اختلاف فاز خروجی نسبت به ورودی به -90° میل می‌کند. بنابراین اگر ورودی هارمونیکهای زیادی داشته باشد، مولفه‌های فرکانس پایین به خوبی در خروجی ظاهر می‌شوند، ولی مولفه‌های فرکانس بالا با کاهش دامنه و تغییر فاز به خروجی می‌رسند. بنابراین چنین عنصر مرتبه اولی تنها پدیده‌های ثابت یا دارای تغییر کند را به طور دقیق، یا تقریباً دقیق، در خروجی بازسازی می‌کند.



منحنی لگاریتم دامنه و مجانبهای آن، و منحنی زاویه فاز $1 + j\omega T$.

در مواردی که تابع تبدیل داده شده جملاتی چون $(1 + j\omega T)^{\mp n}$ دارد، ترسیم مجانبهای مشابهی ممکن است. فرکانس گوشه‌ای باز هم $\omega = 1/T$ و مجانبها باز هم خطوط راست هستند. مجانب فرکانس پایین خط افقی 0 dB است و مجانب فرکانس بالا خطی با شیب -20 dB/dec یا 20 dB/dec است. خطای مجانبها با منحنی واقعی n برابر خطای $(1 + j\omega T)^{\mp 1}$ است. زاویه فاز در هر فرکانس خاص n برابر زاویه $(1 + j\omega T)^{\mp 1}$ است.

عاملهای مرتبه دوم $[1 + 2\zeta(j\omega/\omega_n) + (j\omega/\omega_n)^2]^{-1}$

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + 2\zeta\left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right) + \left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

منحنی مجانبی پاسخ فرکانسی را می‌توان به این ترتیب یافت. داریم

$$20 \log \left| \frac{1}{1 + 2\zeta\left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right) + \left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \right| = -20 \log \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

برای فرکانسهای پایین، $\omega \ll \omega_n$ لگاریتم دامنه عبارت است از
 $-20 \log 1 = 0 \text{ dB}$

پس مجانب فرکانس پایین خط افقی واقع در 0 dB است. در فرکانسهای بالا، $\omega \gg \omega_n$ لگاریتم دامنه عبارت است از

$$-20 \log \frac{\omega^2}{\omega_n^2} = -40 \log \frac{\omega}{\omega_n} \text{ dB}$$

فرکانس ω_n فرکانس گوشه‌ای این عامل مرتبه دوم است.

دو مجانب به دست آمده مستقل از مقدار ζ است.

$$\phi = \angle \frac{1}{1 + 2\zeta\left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right) + \left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} = -\tan^{-1} \frac{2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

اگر $|G(j\omega)|$ در فرکانسی قله داشته باشد، آن فرکانس را **فرکانس تشدید** می‌نامند.

قله $|G(j\omega)|$ در فرکانسی رخ می‌دهد که تابع زیر می‌نیم شود

$$g(\omega) = \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2$$

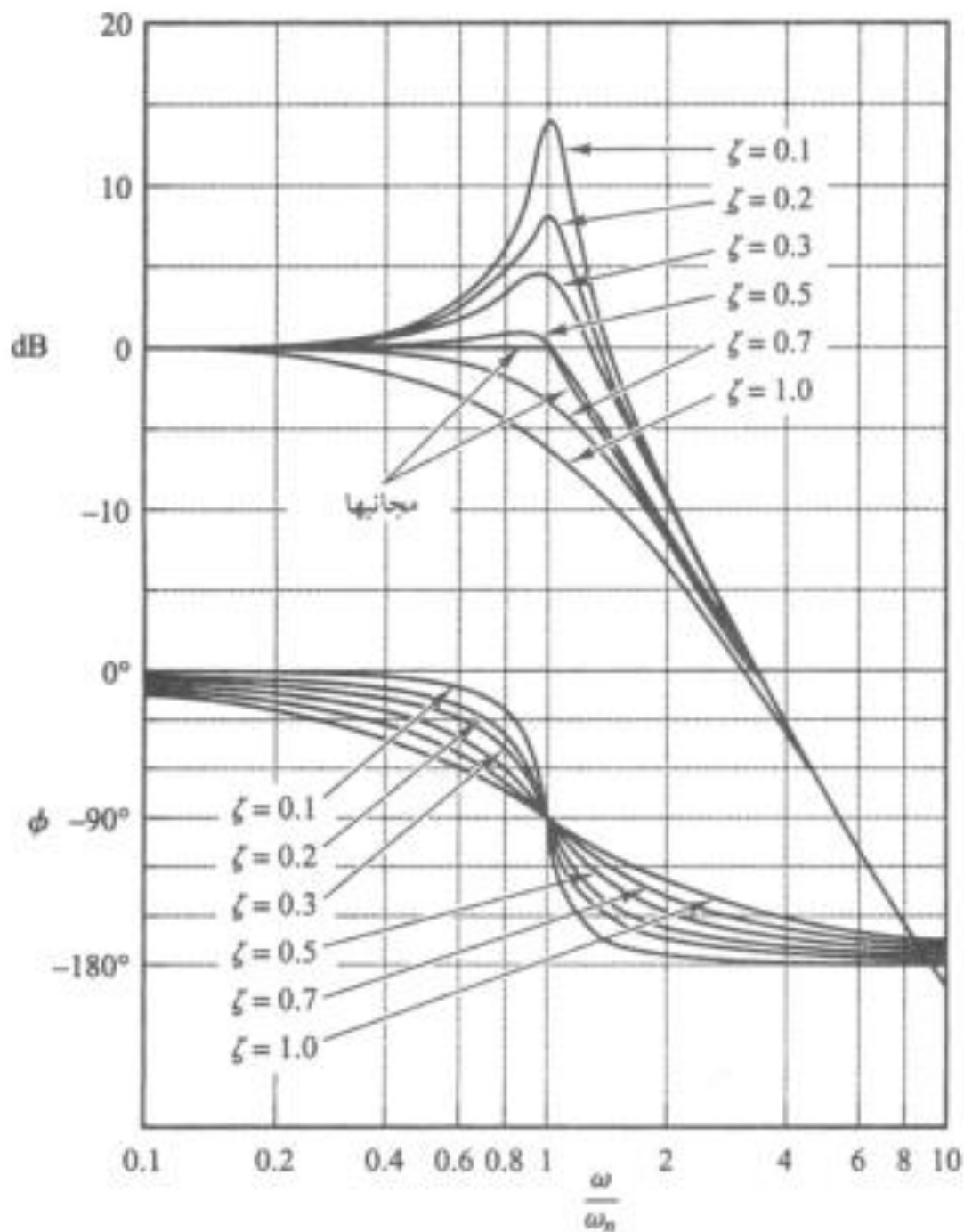
$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2} \quad \text{به ازای } 0 \leq \zeta \leq 0.707$$

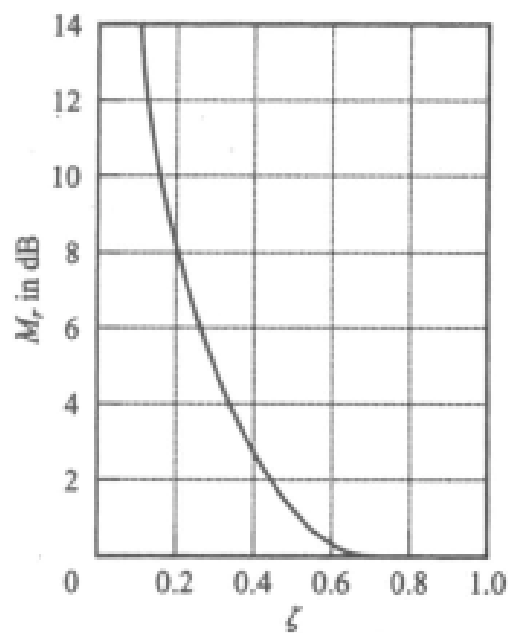
$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \quad \text{میرا}$$

$0.707 < \zeta < 1$ پاسخ پله نوسانی است ، ولی نوسانها آنقدر شدید میرا می‌شوند که قابل مشاهده نیستند

به ازای $0 \leq \zeta \leq 0.707$

$$M_r = |G(j\omega)|_{\max} = |G(j\omega_r)| = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$$





$$\angle G(j\omega_r) = -\tan^{-1} \frac{\sqrt{1-2\zeta^2}}{\zeta} = -90^\circ + \sin^{-1} \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

منحنی پاسخ فرکانسی عامل

$$1 + 2\zeta \left(j \frac{\omega}{\omega_n} \right) + \left(j \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2$$

را می‌توان با عوض کردن علامت منحنی‌های لگاریتم دامنه و زاویه فاز عامل زیر به دست آورد.

$$\frac{1}{1 + 2\zeta \left(j \frac{\omega}{\omega_n} \right) + \left(j \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2}$$

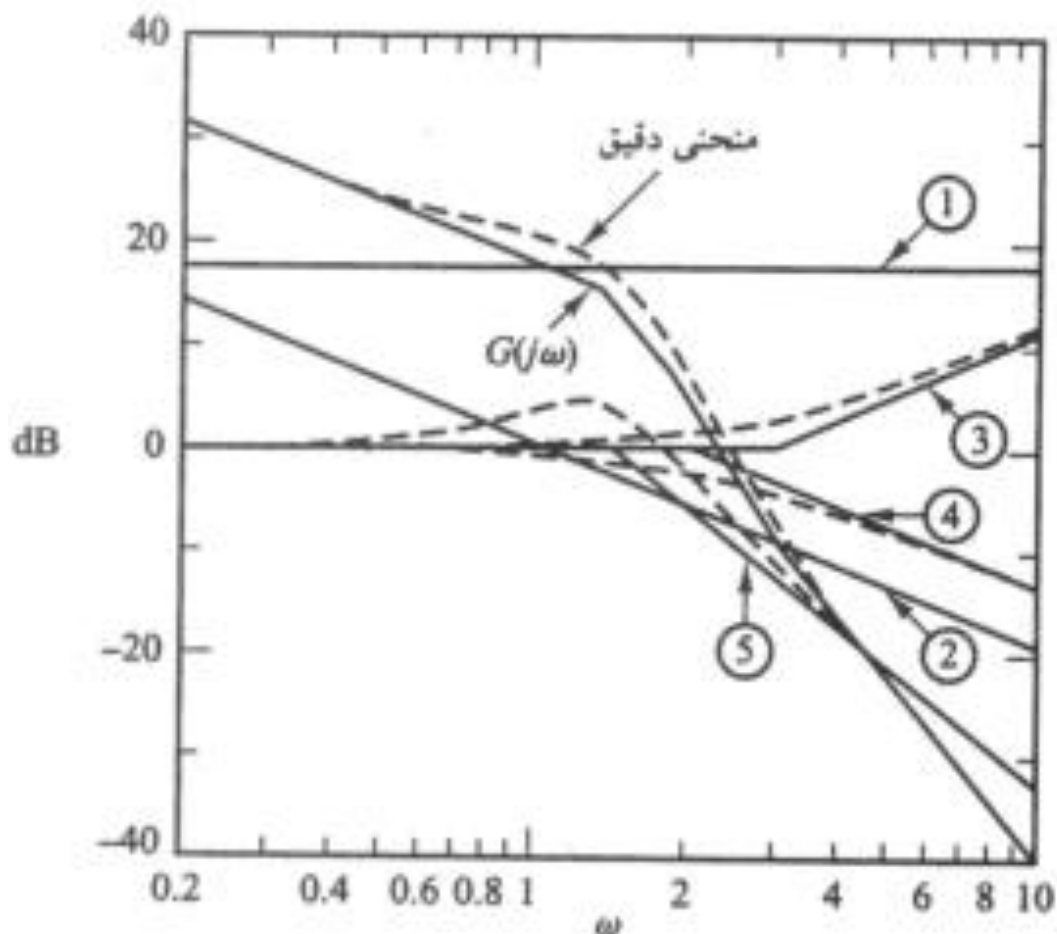
نمودار بوده تابع تبدیل زیر را رسم کنید.

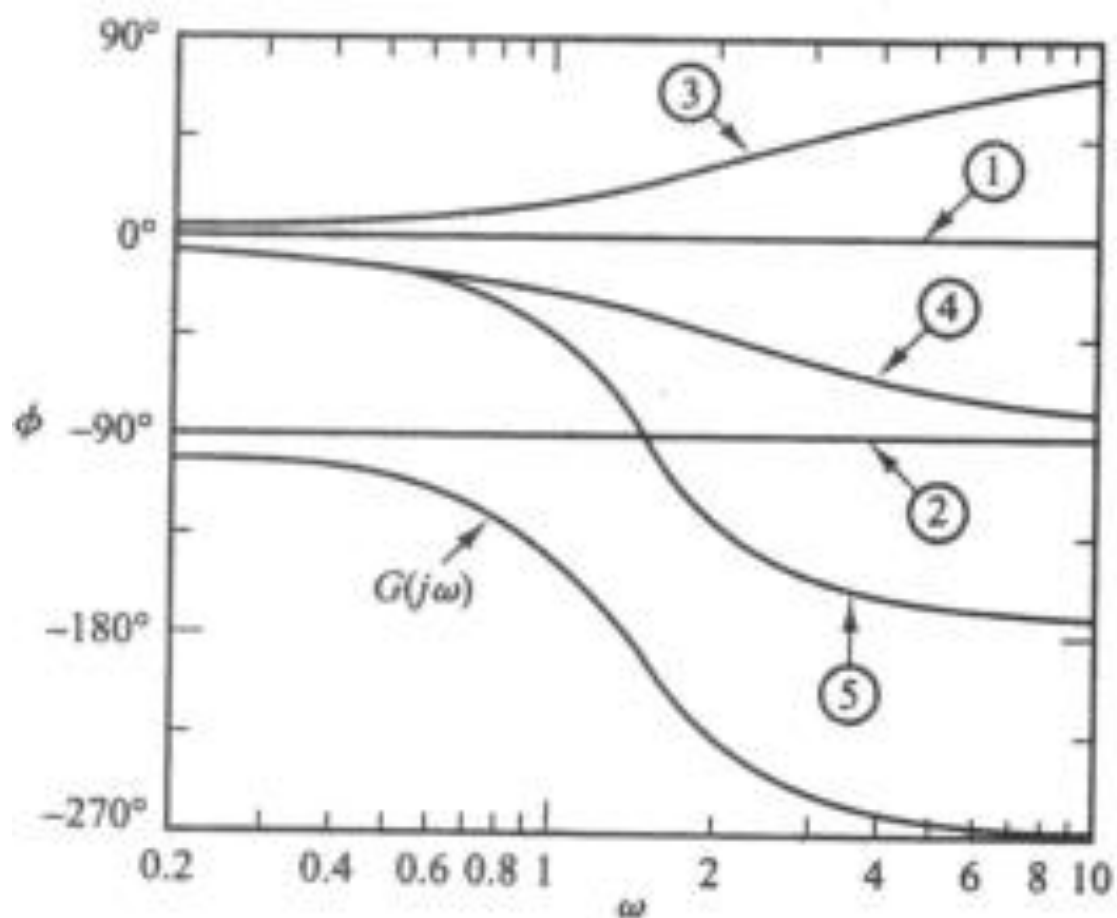
$$G(j\omega) = \frac{10(j\omega + 3)}{(j\omega)(j\omega + 2)[(j\omega)^2 + j\omega + 2]}$$

$$G(j\omega) = \frac{7.5 \left(\frac{j\omega}{3} + 1 \right)}{(j\omega) \left(\frac{j\omega}{2} + 1 \right) \left[\frac{(j\omega)^2}{2} + \frac{j\omega}{2} + 1 \right]}$$

$$7.5, \quad (j\omega)^{-1}, \quad 1 + \frac{j\omega}{3}, \quad \left(1 + \frac{j\omega}{2} \right)^{-1}, \quad \left[1 + \frac{j\omega}{2} + \frac{(j\omega)^2}{2} \right]^{-1}$$

فرکانسهای گوشه‌ای عوامل سوم، چهارم، و پنجم به ترتیب $\omega = 3$ ، $\omega = 2$ ، و $\omega = \sqrt{2}$ است. نسبت میرایی آخرین جمله ۳۵۳۶/۰ است.





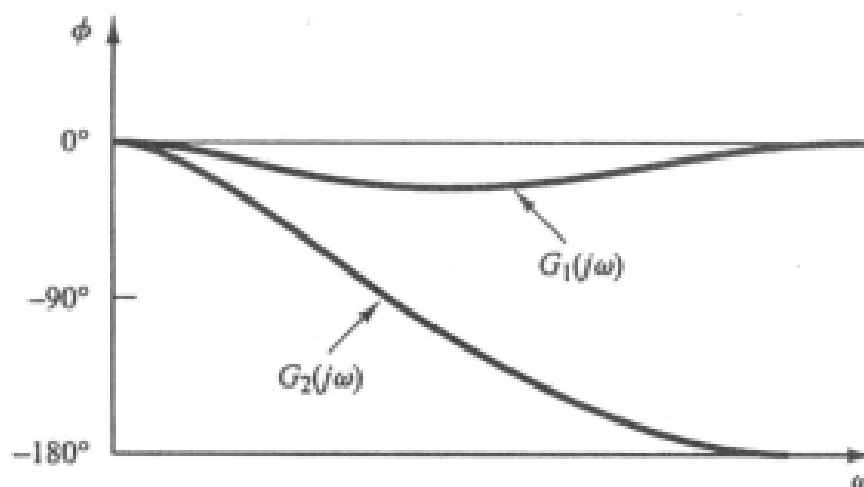
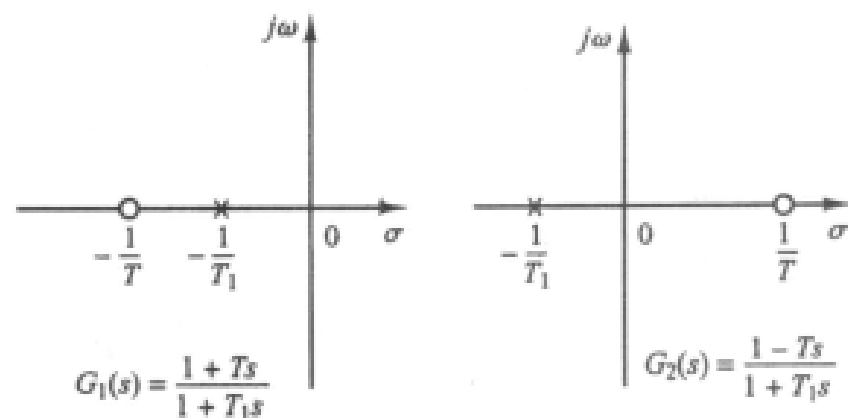
سیستمهای می نیمم فاز و سیستمهای غیر می نیمم فاز. توابع تبدیلی که در نیمه راست صفحه s نه قطب دارند و نه صفر، توابع تبدیل می نیمم فاز هستند، و آنهایی که در نیمه راست صفحه s قطب و / یا صفر دارند توابع تبدیل غیر می نیمم فاز هستند. سیستمهای با تابع تبدیل می نیمم فاز سیستمهای می نیمم فاز و سیستمهای با تابع تبدیل غیر می نیمم فاز سیستمهای غیر می نیمم فاز نامیده می شوند.

از میان سیستمهایی که مشخصه دامنه یکسانی دارند، گستره تغییرات فاز سیستم می نیمم فاز کمتر از بقیه است، و هر سیستم غیر می نیمم فازی با آن مشخصه دامنه، گستره تغییرات فاز بزرگتری دارد.

توجه کنید که برای یک سیستم می نیمم فاز تابع تبدیل را می توان تنها با توجه به منحنی دامنه به طور یکتا مشخص کرد. برای سیستمهای غیر می نیمم فاز چنین نیست. ضرب هر تابع تبدیلی در تابع تبدیل یک فیلتر تمام گذر منحنی دامنه آن را تغییر نمی دهد. ولی مشخصه فاز آن تغییر می کند.

دو سیستم با توابع تبدیل سینوسی زیر در نظر بگیرید.

$$G_1(j\omega) = \frac{1 + j\omega T}{1 + j\omega T_1} \quad , \quad G_2(j\omega) = \frac{1 - j\omega T}{1 - j\omega T_1} \quad , \quad 0 < T < T_1$$



یعنی اگر منحنی دامنه یک سیستم می‌نیمم فاز در تمام گستره فرکانسی از صفر تا بینهایت مشخص باشد، منحنی فاز نیز به طور یکتا مشخص می‌شود و برعکس. این مطلب برای سیستمهای غیرمی‌نیمم فاز صادق نیست. وضعیت می‌نیمم نبودن فاز به دو صورت ممکن است پیش بیاید. یکی وقتی سیستم یک عنصر یا چند عنصر غیرمی‌نیمم فاز داشته باشد، و یکی وقتی سیستم حلقه‌های داخلی ناپایدار داشته باشد.

در یک سیستم می‌نیمم فاز، زاویه فاز در $\omega = \infty$ به $-90^\circ(q-p)$ می‌رسد که در آن p و q به ترتیب درجه چند جمله‌ای‌های صورت و مخرج است. در سیستمهای غیرمی‌نیمم فاز، زاویه فاز در $\omega = \infty$ با $-90^\circ(q-p)$ تفاوت دارد. هر دو نوع سیستم شیب منحنی لگاریتم دامنه در $\omega = \infty$ برابر $-20^\circ(q-p)$ دسیبل بر دهه است. بنابراین می‌توان می‌نیمم فاز بودن یک سیستم را با بررسی شیب مجانب فرکانس بالای منحنی دامنه و زاویه فاز در $\omega = \infty$ تشخیص داد. اگر با میل ω به بینهایت شیب منحنی لگاریتم دامنه $-20^\circ(q-p)$ dB/dec باشد و فاز در $\omega = \infty$ به $-90^\circ(q-p)$ برسد، آنگاه سیستم می‌نیمم فاز است.

پاسخ سیستمهای غیرمی نیمم فاز کند است، زیرا در شروع پاسخ رفتاری ناقص دارند. در بسیاری از سیستمهای کنترل عملی باید از پسفازی بیش از حد به دقت اجتناب کرد. در طراحی یک سیستم اگر سرعت پاسخ در درجه اول اهمیت باشد، نباید از عناصر غیرمی نیمم فاز استفاده کرد. (در سیستمهای کنترل، تأخیر انتقالی یک نمونه متداول از عناصر غیرمی نیمم فاز است.)

تأخیر انتقالی. تأخیر انتقالی یک رفتار غیرمی نیمم فاز است که در فرکانسهای بالا پسفازی زیادی ایجاد می کند، ولی باعث تضعیف دامنه نمی شود. تأخیر انتقالی معمولاً در سیستمهای حرارتی، هیدرولیکی، و نیوماتیکی وجود دارد.

تأخیر انتقالی بیان شده در زیر را در نظر بگیرید

$$G(j\omega) = e^{-j\omega T}$$

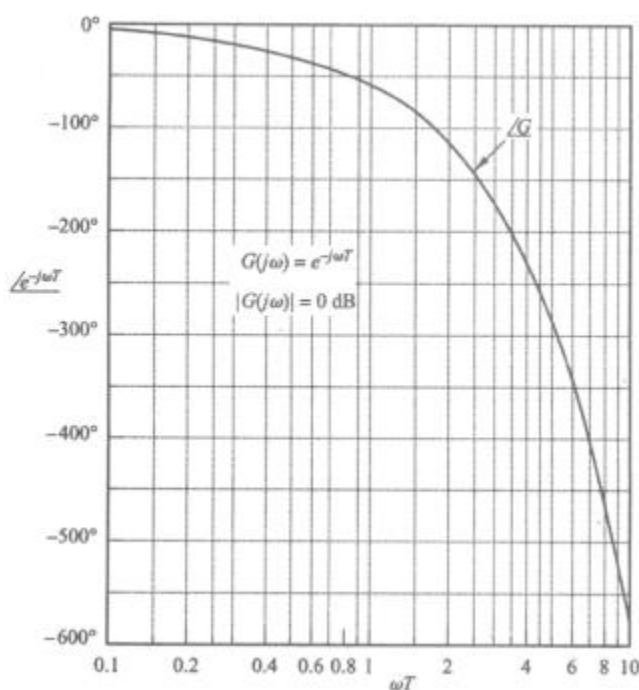
دامنه همواره برابر یک است، زیرا

$$|G(j\omega)| = |\cos \omega T - j \sin \omega T| = 1$$

بنابراین لگاریتم دامنه تأخیر انتقالی $e^{-j\omega T}$ برابر 0 dB است. فاز تأخیر انتقالی برابرست با

$$\angle G(j\omega) = -\omega T \quad (\text{رادیان})$$

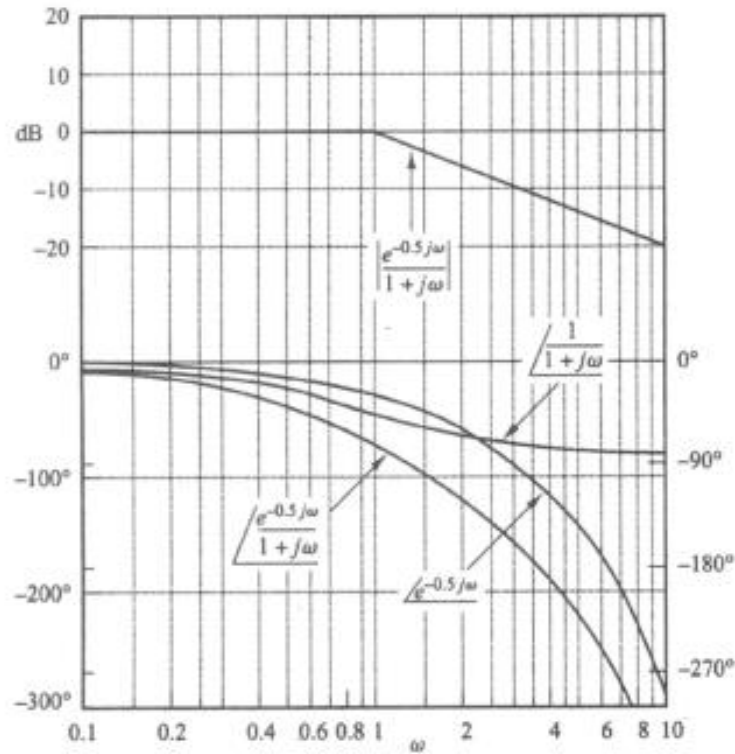
$$= -57.3 \omega T \quad (\text{درجه})$$



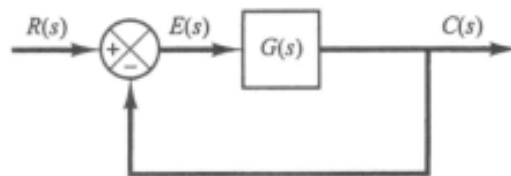
نمودار بوده تابع تبدیل زیر را رسم کنید:

$$G(j\omega) = \frac{e^{-j\omega L}}{1+j\omega T}$$

به ازای $L=0.5$ و $T=1$



رابطه بین نوع سیستم و منحنی لگاریتمی دافنه.



$$G(s) = \frac{K(T_a s + 1)(T_b s + 1) \cdots (T_m s + 1)}{s^N (T_1 s + 1)(T_r s + 1) \cdots (T_p s + 1)}$$

$$G(j\omega) = \frac{K(T_a j\omega + 1)(T_b j\omega + 1) \cdots (T_m j\omega + 1)}{(j\omega)^N (T_1 j\omega + 1)(T_r j\omega + 1) \cdots (T_p j\omega + 1)}$$

خطاهای ایستای وضعیت، سرعت، و شتاب به ترتیب رفتار فرکانس پایین سیستمهای نوع ۰، نوع ۱، و نوع ۲ را توصیف می‌کنند. برای هر سیستم تنها یکی از خطاهای ایستا محدود و مهم است. (هر چه مقدار خطای ایستای محدود بزرگتر باشد، بهره حلقه به ازای $\omega \rightarrow 0$ بزرگتر است).

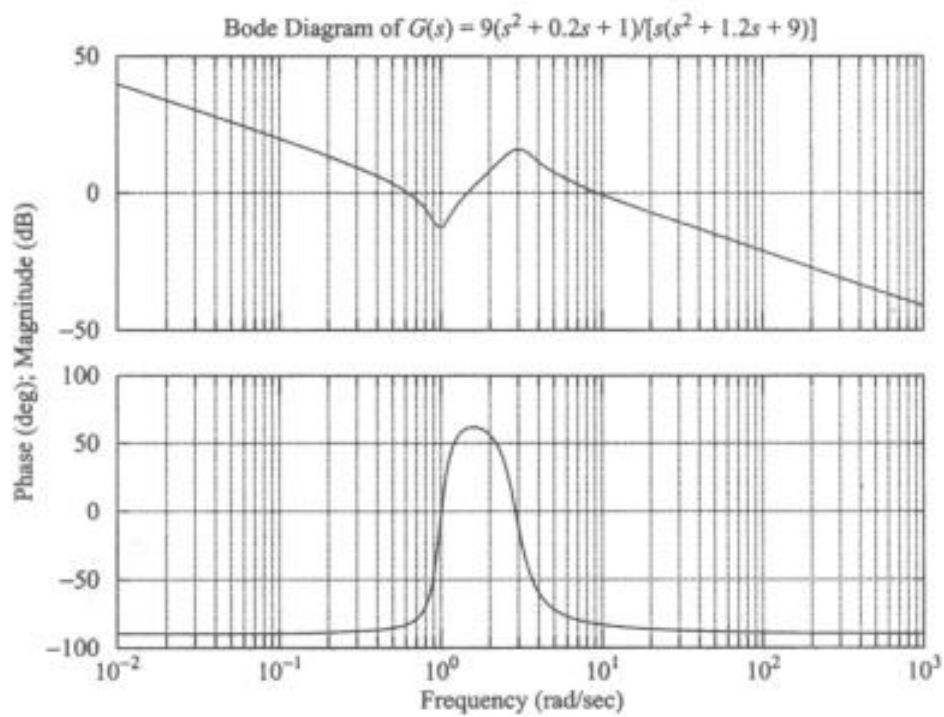
نوع سیستم شیب منحنی لگاریتم دامنه در فرکانسهای پایین را تعیین می‌کند. بنابراین اطلاعات مربوط به وجود و دامنه خطای حالت ماندگار یک سیستم کنترل به یک ورودی خاص را می‌توان با مشاهده رفتار منحنی لگاریتم دامنه در فرکانسهای پایین تعیین کرد.

منحنی لگاریتم دامنه یک سیستم نوع صفر.	منحنی لگاریتم دامنه یک سیستم نوع ۱.	منحنی لگاریتم دامنه یک سیستم نوع ۲.
$\lim_{\omega \rightarrow 0} G(j\omega) = K = K_p$	برای $\omega \ll 1$، $G(j\omega) = \frac{K_v}{j\omega}$ $K_v = \omega_1$	برای $\omega \ll 1$، $G(j\omega) = \frac{K_a}{(j\omega)^2}$ $\omega_a = \sqrt{K_a}$
پس مجانب فرکانس پایین یک خط افقی در $20 \log K_p$ dB است.	مثال $G(s) = \frac{K}{s(Js + F)}$ سیستم نوع ۱ با فیدبک واحد فرکانس گوشه‌ای را ω_p فرکانس برخورد خط با شیب -40 dB/dec (یا امتداد آن) با خط 0 dB را ω_r $\omega_r = \frac{F}{J}$، $\omega_p^2 = \frac{K}{J}$ $\omega_n = K_v = \frac{K}{F}$ $\zeta = \frac{F}{2\sqrt{KJ}} = \frac{\omega_r}{2\omega_p}$ $\frac{\omega_n}{\omega_p} = \frac{\omega_r}{\omega_p}$ $\log \omega_n - \log \omega_p = \log \omega_r - \log \omega_p$	شیب -20 dB/dec (یا امتداد آن) با خط $\omega=1$ دامنه $20 \log K_v$ را نشان می‌دهد. نقطه ω_p درست بین نقاط ω_n و ω_r است. شیب -40 dB/dec (یا امتداد آن) با خط $\omega=1$ دامنه $20 \log K_a$ را نشان می‌دهد.

$r(t) = \frac{1}{4}t^4$ ورودی شتاب	$r(t) = t$ ورودی شیب	$r(t) = 1$ ورودی پله	
∞	∞	$\frac{1}{1+K}$	سیستم نوع ۰
∞	$\frac{1}{K}$	۰	سیستم نوع ۱
$\frac{1}{K}$	۰	۰	سیستم نوع ۲

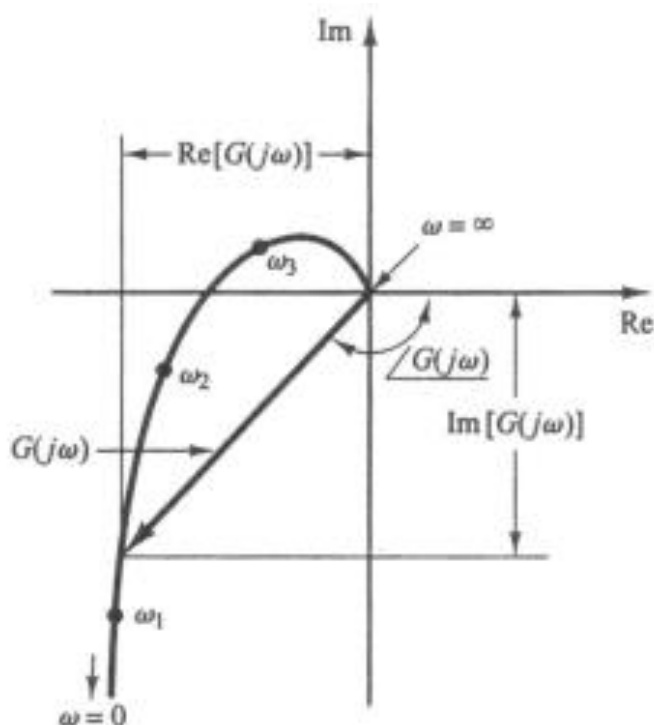
مثال نمودار بود

$$G(s) = \frac{9(s^2 + 0.2s + 1)}{s(s^2 + 1.2s + 9)}$$



نمودارهای قطبی

نمودار قطبی تابع تبدیل سینوسی $G(j\omega)$ نمودار دامنه $G(j\omega)$ برحسب زاویه $G(j\omega)$ در مختصات قطبی است، وقتی که ω از صفر تا بینهایت تغییر می‌کند. پس نمودار قطبی، مکان هندسی بردارهای $G(j\omega)$ با تغییر ω از ۰ تا ∞ است. توجه کنید که در نمودار قطبی زاویه مثبت (منفی) در جهت پادساعتگرد (ساعتگرد) و نسبت به محور حقیقی سنجیده می‌شود. نمودار قطبی غالباً نمودار نایکویست نامیده



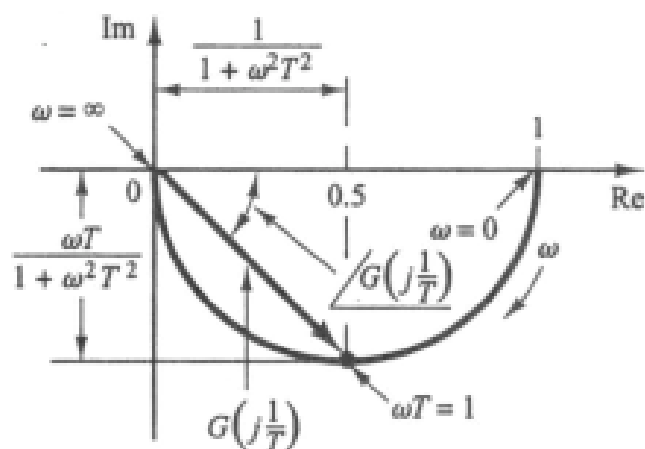
مثال: سیستم درجه اول

نمودار قطبی عامل $G(j\omega) = 1/(1 + j\omega T)$

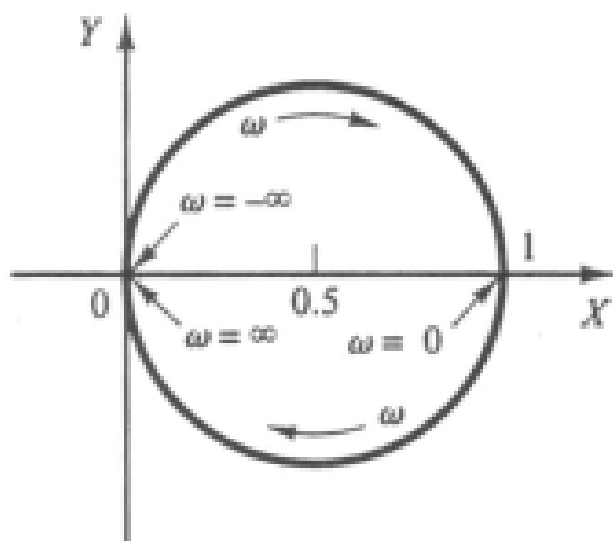
$$G(j\omega) = X + jY$$

$$X = \frac{1}{1 + \omega^2 T^2} = \text{بخش حقیقی } G(j\omega)$$

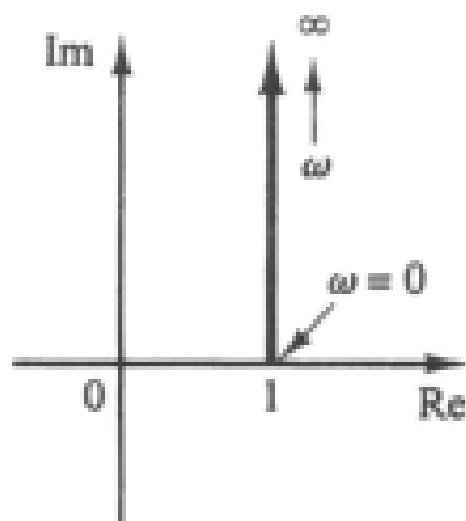
$$Y = \frac{-\omega T}{1 + \omega^2 T^2} = \text{بخش موهومی } G(j\omega)$$



$$\left(X - \frac{1}{\gamma}\right)^2 + Y^2 = \left(\frac{1}{\gamma} \frac{1 - \omega^2 T^2}{1 + \omega^2 T^2}\right)^2 + \left(\frac{-\omega T}{1 + \omega^2 T^2}\right)^2 = \left(\frac{1}{\gamma}\right)^2$$



$$1 + j\omega T$$

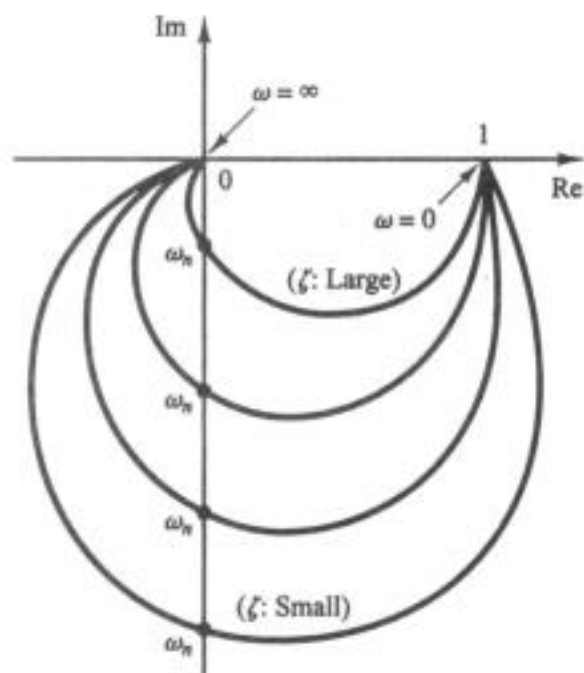


مثال: سیستم درجه دوم

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + 2\zeta \left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right) + \left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \quad \text{به ازای } \zeta > 0$$

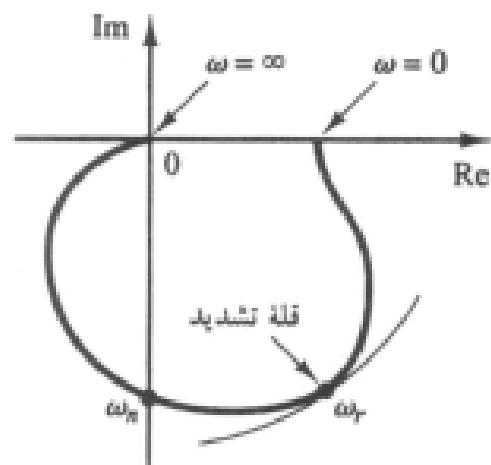
$$\lim_{\omega \rightarrow 0} G(j\omega) = 1 \angle 0^\circ, \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} G(j\omega) = 0 \angle -180^\circ$$

بر بخش منفی محور حقیقی مماس است.



حالت فرومیرا در $\omega = \omega_n$ داریم $G(j\omega_n) = 1/(j2\zeta)$

زاویه فاز در $\omega = \omega_n$ برابر -90° است.



نمودار قطبی

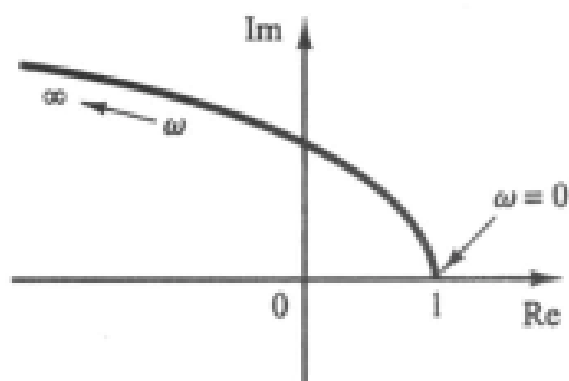
$$1 + 2\zeta \left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right) + \left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2$$

به ازای $\zeta > 0$.

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + 2\zeta \left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right) + \left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} = \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right) + j\left(\frac{2\zeta\omega}{\omega_n}\right)$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} G(j\omega) = 1 \angle 0^\circ$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} G(j\omega) = 0 \angle -180^\circ$$

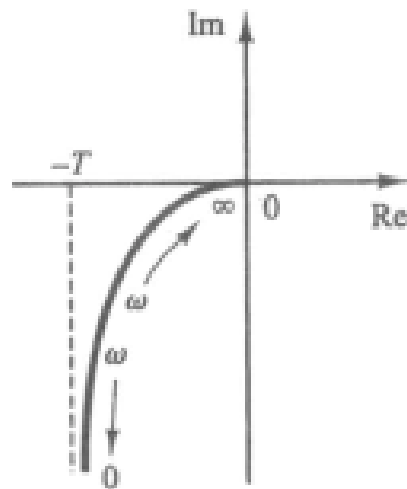


$$G(s) = \frac{1}{s(Ts + 1)}$$

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega(1 + j\omega T)} = -\frac{T}{1 + \omega^2 T^2} - j\frac{1}{\omega(1 + \omega^2 T^2)}$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} G(j\omega) = -T - j\infty$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} G(j\omega) = 0 - j0$$

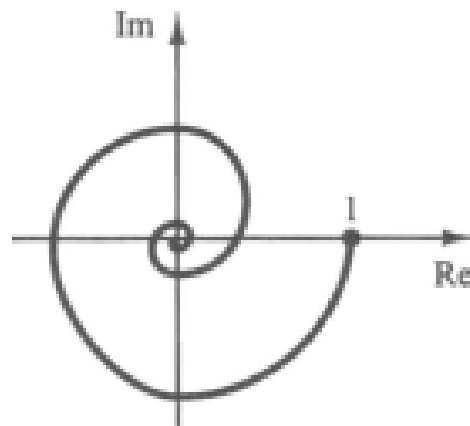


$$G(j\omega) = \frac{e^{-j\omega L}}{1 + j\omega T}$$

$$G(j\omega) = \left(e^{-j\omega L} \right) \left(\frac{1}{1 + j\omega T} \right)$$

$$|G(j\omega)| = |e^{-j\omega L}| \cdot \left| \frac{1}{1 + j\omega T} \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}}$$

$$\angle G(j\omega) = \angle e^{-j\omega L} + \angle \frac{1}{1 + j\omega T} = -\omega L - \tan^{-1} \omega T$$



شکل کلی نمودارهای قطبی

تابع تبدیلی به شکل زیر را در نظر بگیرید.

$$G(j\omega) = \frac{K(1 + j\omega T_a)(1 + j\omega T_b) \dots}{(j\omega)^{\lambda}(1 + j\omega T_1)(1 + j\omega T_2) \dots}$$

$$= \frac{b_n(j\omega)^m + b_1(j\omega)^{m-1} + \dots}{a_n(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + \dots}$$

که در آن $n > m$ یعنی درجه چندجمله‌ای مخرج بزرگتر از درجه چندجمله‌ای صورت است.

۱. $\lambda = 0$ یا سیستم نوع ۰: نقطه شروع نمودار قطبی (که با $\omega = 0$ متناظر است) محدود و روی بخش

مثبت محور حقیقی است. مماس بر نمودار قطبی در $\omega = 0$ بر محور حقیقی عمود است. نقطه نهایی،

که با $\omega = \infty$ متناظر است، در مبدأ قرار دارد و منحنی در آن بر یکی از محورها مماس است.

۲. $\lambda = 1$ یا سیستم نوع ۱: جمله $j\omega$ موجود در مخرج در تمام فاصله $0 \leq \omega \leq \infty$ ، -90° به زاویه

$G(j\omega)$ اضافه می‌کند. در $\omega = 0$ اندازه $G(j\omega)$ بینهایت، و زاویه فاز -90° است. در فرکانسهای

پایین نمودار قطبی بر خطی موازی با بخش منفی محور موهومی مجانب است. در $\omega = \infty$ دامنه

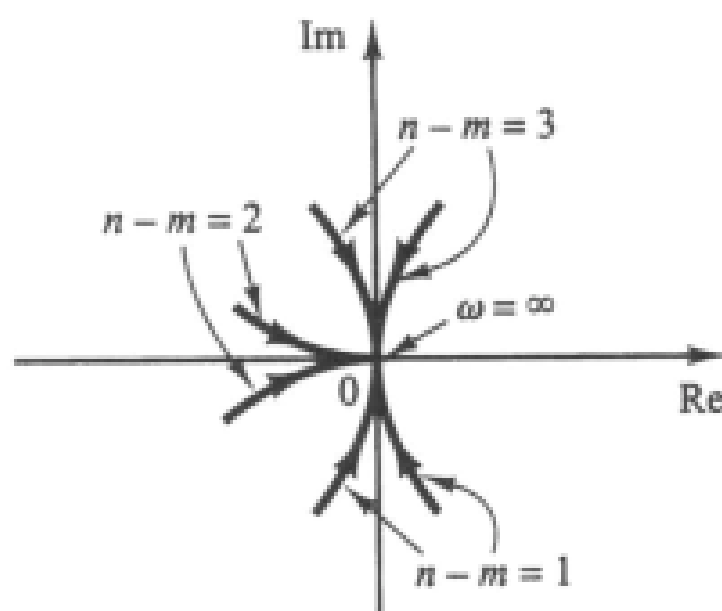
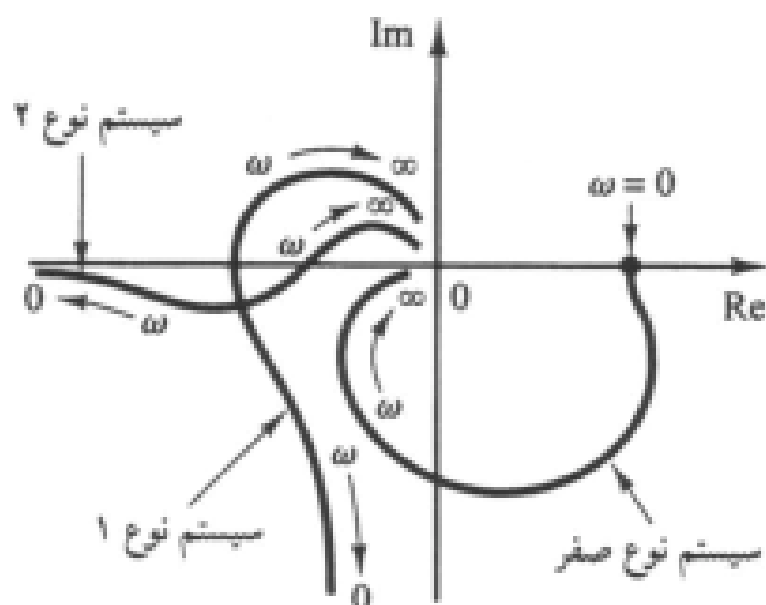
صفر می‌شود، منحنی به مبدأ می‌رسد و بر یکی از محورها مماس می‌شود.

۳. $\lambda = 2$ یا سیستم نوع ۲: جمله $(j\omega)^2$ موجود در مخرج در تمام فاصله $0 \leq \omega \leq \infty$ ، -180° به

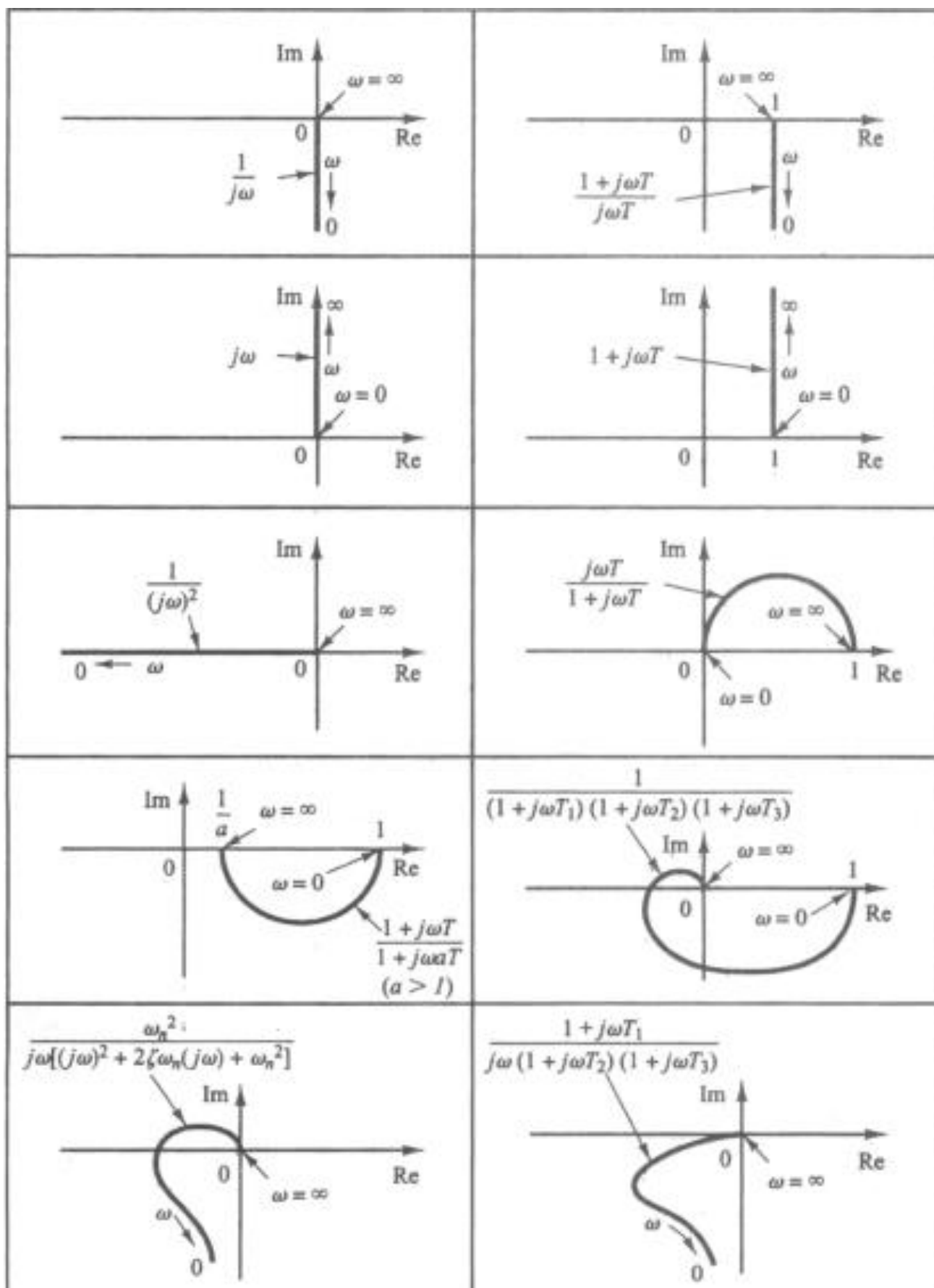
زاویه $G(j\omega)$ اضافه می‌کند. در $\omega = 0$ دامنه $G(j\omega)$ بینهایت و زاویه فاز -180° است. در

فرکانسهای پایین، نمودار قطبی با خطی موازی با بخش منفی محور حقیقی مجانب است. در $\omega = \infty$ دامنه

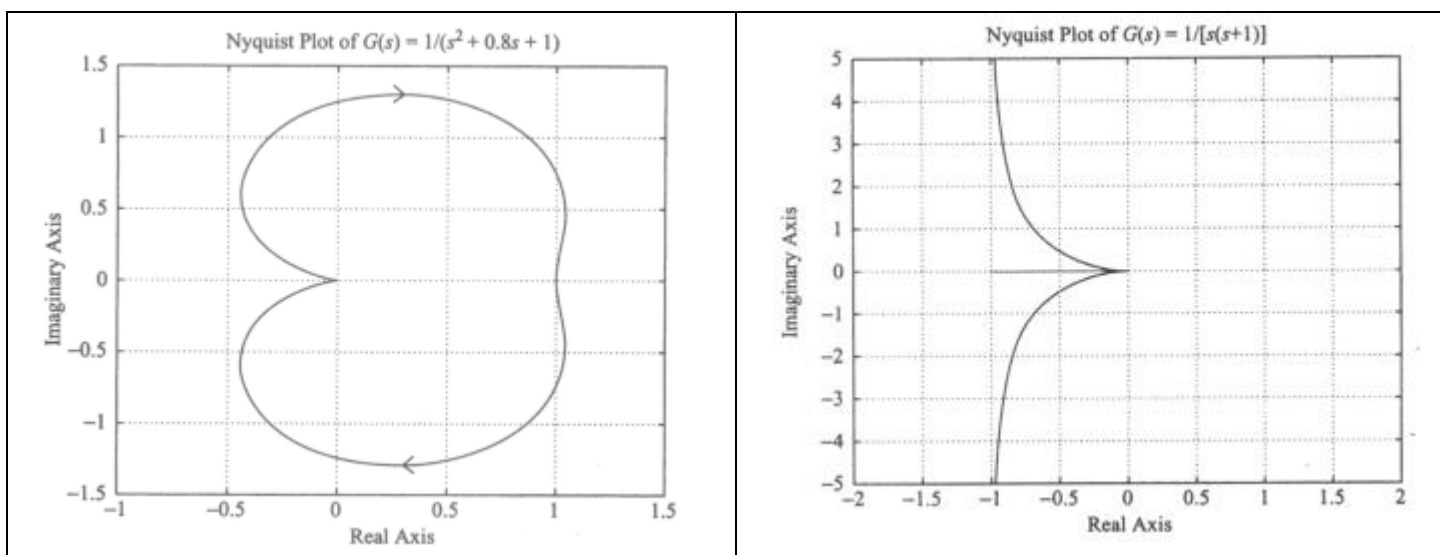
دامنه صفر می‌شود و منحنی بر یکی از محورها مماس است.



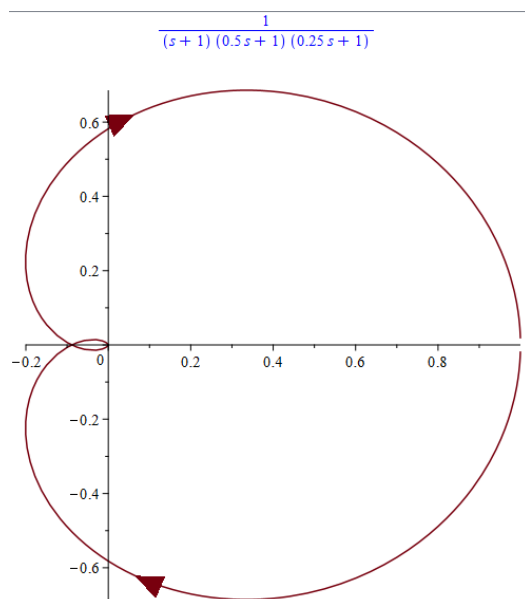
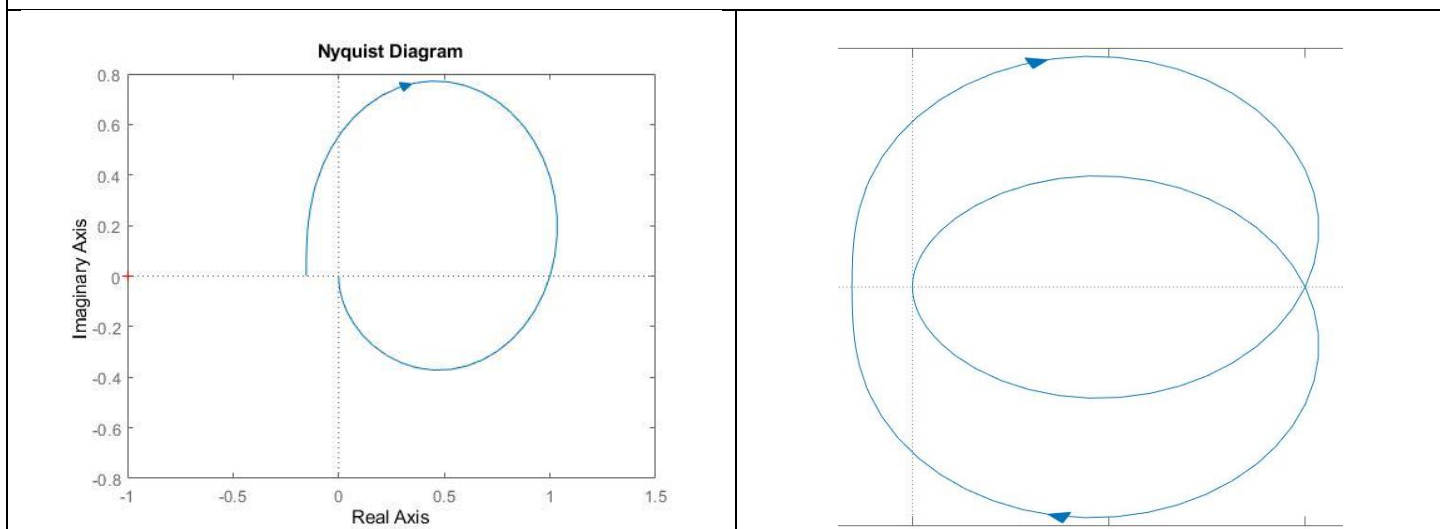
شکل کلی بخشهای فرکانس پایین نمودارهای قطبی سیستمهای نوع ۰، ۱، و نوع ۲ در شکلهای ۷-۳۳ نشان داده شده است. می‌توان دید که اگر درجه چندجمله‌ای مخرج $G(j\omega)$ از درجه چندجمله‌ای صورت بزرگتر باشد، مکان هندسی $G(j\omega)$ به صورت ساعتگرد، به مبدأ همگرا می‌شود. در مکان هندسی به صورت نشان داده شده در شکل ۷-۳۴ بر یکی از محورها مماس می‌شود.

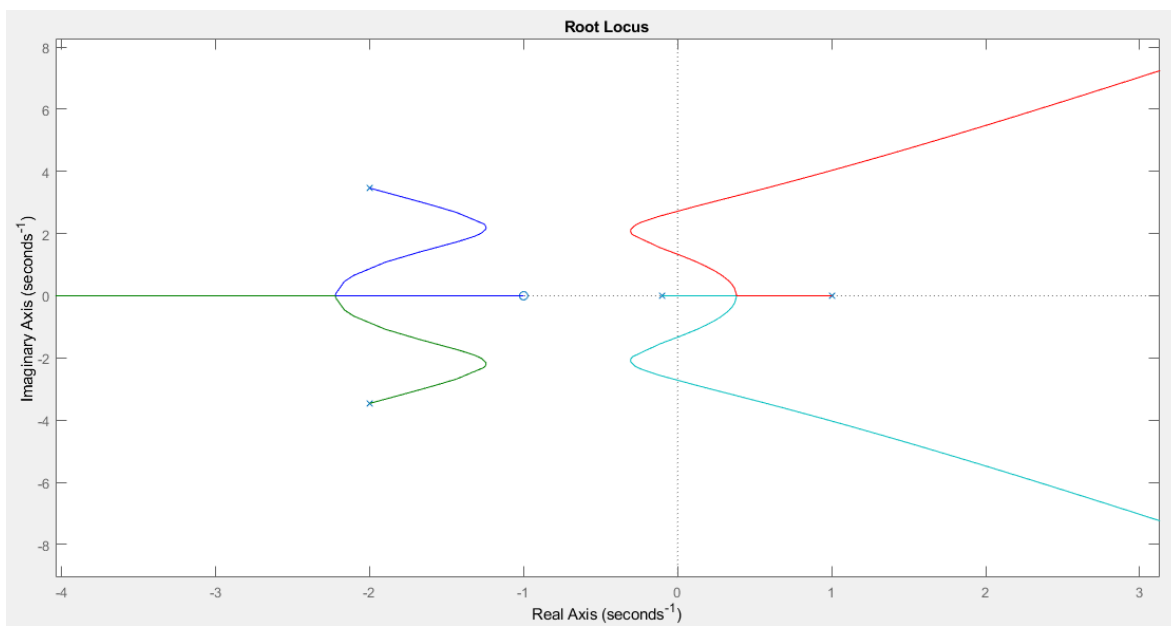
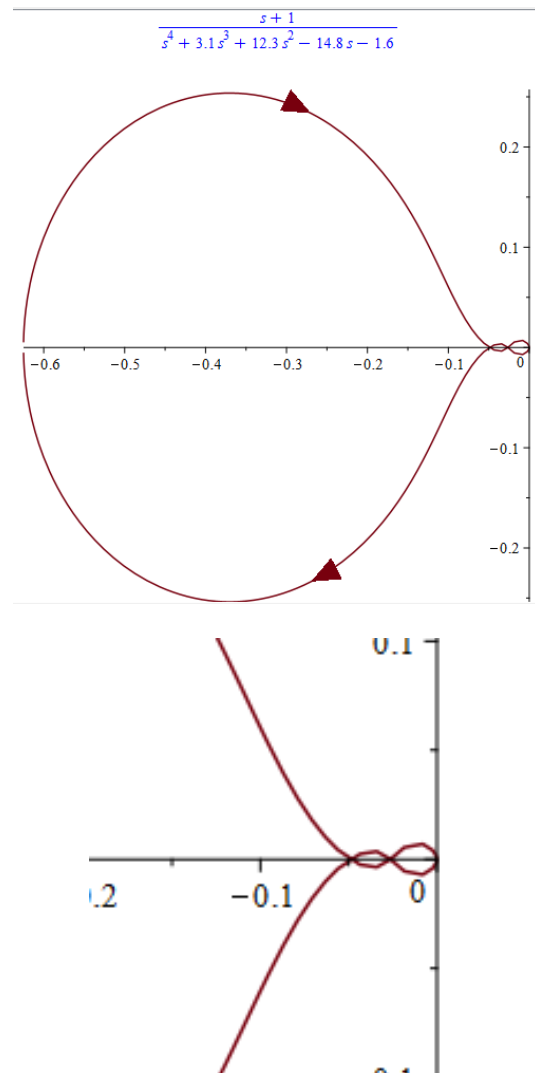


مثال: رسم نمودار قطبی در گستره فرکانسهای مثبت و منفی



$$(s-1)/(s^2+s+6.5)$$





نمودارهای لگاریتم دامنه بر حسب فاز (نیکولز)

نمودار لگاریتم دامنه برحسب دسیبل، برحسب زاویه فاز یا حاشیه فاز، در گستره فرکانسی مورد نظر

$$[\phi - (-180^\circ) = 180^\circ + \phi \text{ یعنی } -180^\circ \text{ است؛ یعنی}]$$

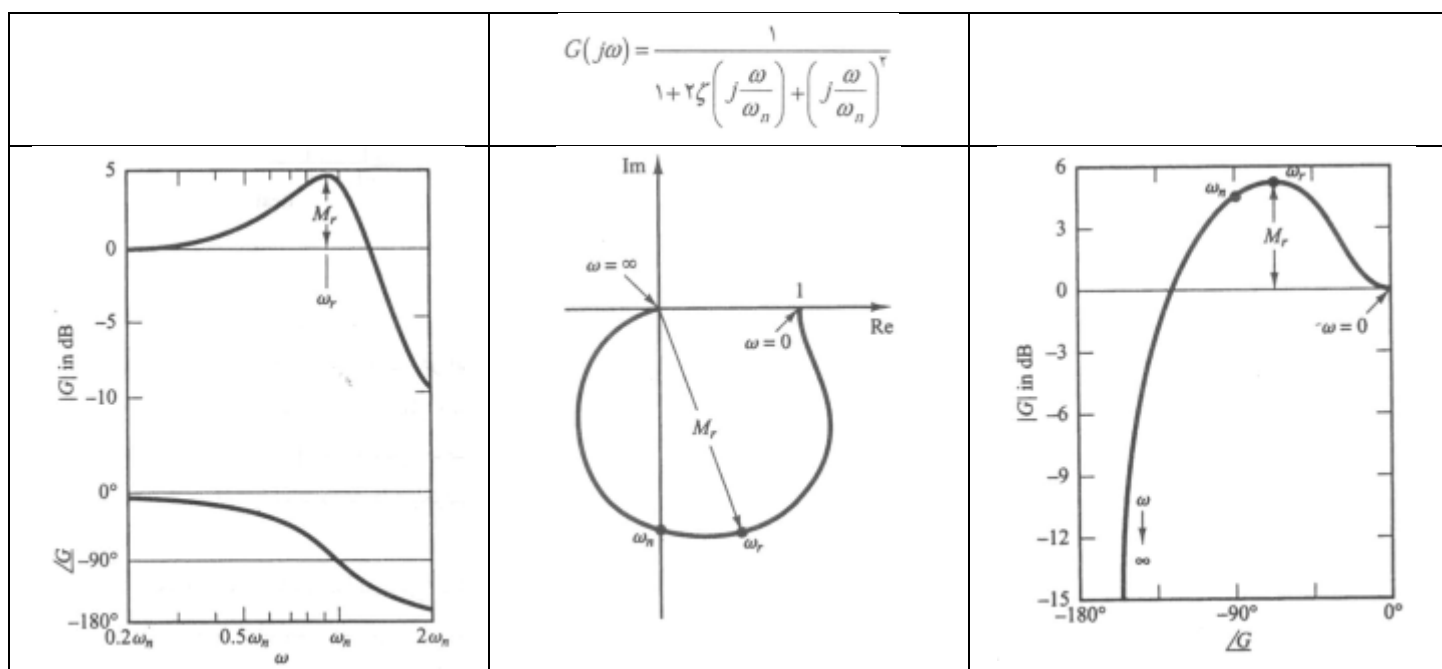
مزیت نمودار لگاریتم دامنه برحسب فاز این است که می‌توان پایداری نسبی سیستم حلقه بسته را به سرعت تعیین و مشخصات جبران کننده لازم را به سهولت به دست آورد.

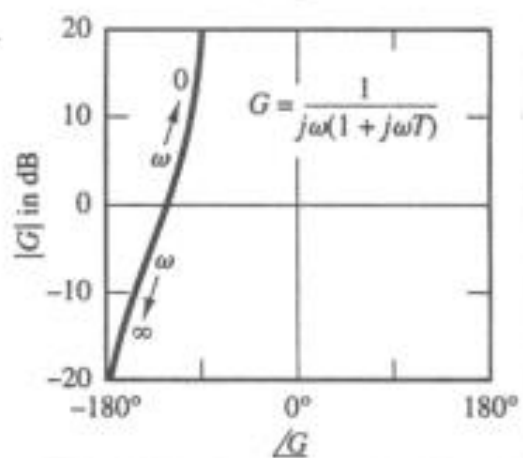
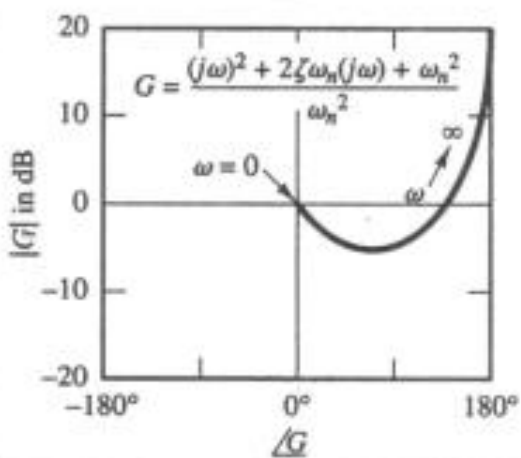
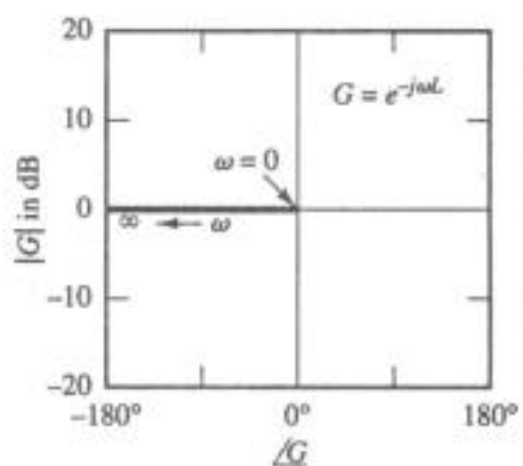
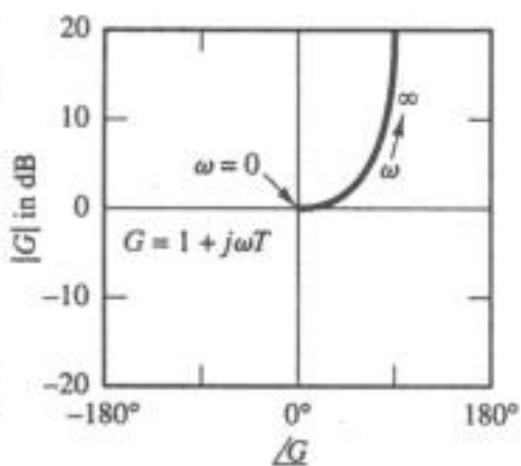
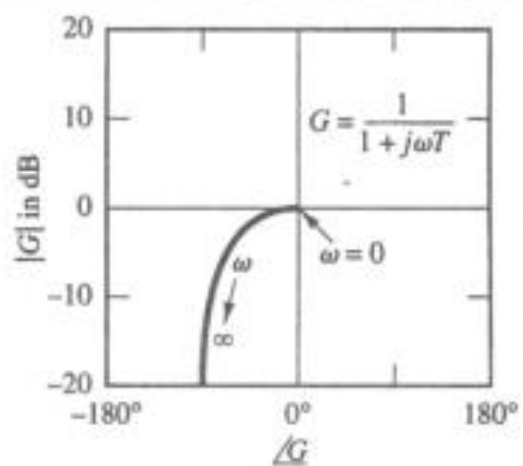
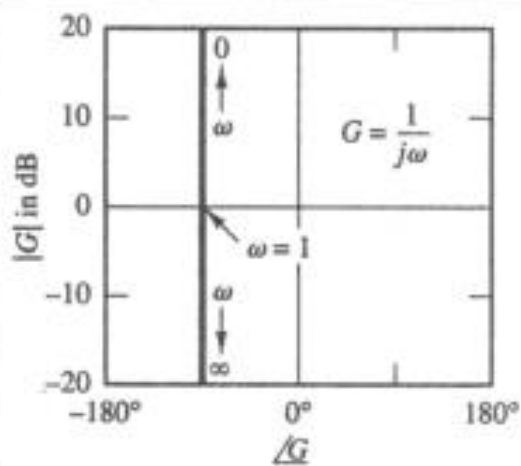
منحنی‌های لگاریتم دامنه برحسب فاز توابع تبدیل سینوسی $G(j\omega)$ و $1/G(j\omega)$ نسبت به مبدأ تقارن دارند، زیرا

$$\left| \frac{1}{G(j\omega)} \right| \text{ dB} = - \left| G(j\omega) \right| \text{ dB}$$

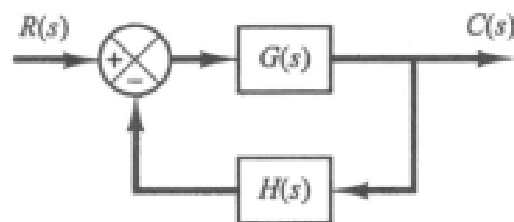
$$\angle \frac{1}{G(j\omega)} = - \angle G(j\omega)$$

و





معیار پایداری نایکویست



معیار پایداری نایکویست سیستم حلقه بسته را برحسب پاسخ فرکانسی حلقه باز و قطبهای حلقه باز تعیین می‌کند.

معیار پایداری نایکویست [برای حالت خاصی که $G(s)H(s)$ روی محور $j\omega$ نه صفر دارد و نه قطب]: در سیستم شکل ۷-۴۴ اگر تابع تبدیل حلقه باز $G(s)H(s)$ در نیمه راست صفحه s ، k قطب داشته باشد و ثابت $\lim_{s \rightarrow \infty} G(s)H(s) = 0$ ، برای پایداری باید مکان هندسی $G(j\omega)H(j\omega)$ با تغییر ω از $-\infty$ تا $+\infty$ ، نقطه $1 + j0$ را k بار در جهت پاد ساعتگرد دور بزند.

ملاحظات در مورد معیار پایداری نایکویست

۱. این معیار را می‌توان به شکل زیر بیان کرد

$$Z = N + P$$

که در آن Z = تعداد صفرهای $1 + G(s)H(s)$ در نیمه راست صفحه s

N = تعداد دور حول نقطه $1 + j0$ در جهت ساعتگرد

P = تعداد قطبهای $G(s)H(s)$ در نیمه راست صفحه s

اگر P صفر نباشد، برای داشتن سیستمی پایدار باید داشته باشیم $Z = 0$ یا $N = -P$ ؛ یعنی نقطه $1 + j0$ باید P بار در جهت پاد ساعتگرد دور زده شود.

اگر $G(s)H(s)$ در نیمه راست صفحه s قطب نداشته باشد، $Z = N$ ؛ یعنی برای پایداری مکان هندسی $G(j\omega)H(j\omega)$ نباید نقطه $1 + j0$ را دور بزند. در این حالت لازم نیست مکان هندسی به ازای تمام محور $j\omega$ در نظر گرفته شود، بلکه تنها بخش فرکانسهای مثبت کافی است.

۲. هنگام بررسی پایداری سیستمهای چندحلقه‌ای باید دقت کنیم، زیرا این سیستمها ممکن است در نیمه راست صفحه s قطب داشته باشند. (توجه کنید که ممکن است حلقه‌های داخلی ناپایدار باشند، ولی کل سیستم حلقه بسته با طراحی مناسب پایدار شده باشد). بررسی ساده دورهای حول $-1+j0$ توسط نمودارهای $G(j\omega)H(j\omega)$ برای تشخیص پایداری یا ناپایداری سیستمهای چندحلقه‌ای کافی نیست. البته برای این موارد می‌توان با اعمال معیار پایداری روث به مخرج $G(s)H(s)$ تعیین کرد که $1+G(s)H(s)$ در نیمه راست صفحه s قطب دارد یا نه.

۳. اگر مکان هندسی $G(j\omega)H(j\omega)$ از نقطه $-1+j0$ بگذرد، صفرهای معادله مشخصه، یا قطبهای حلقه بسته، روی محور $j\omega$ قرار دارند. چنین وضعیتی برای سیستمهای کنترل عملی مطلوب نیست.

معیار پایداری نایکویست [برای حالت عمومی که $G(s)H(s)$ روی محور $j\omega$ قطب و / یا صفر دارد]: در سیستم شکل ۷-۴۴ اگر تابع تبدیل حلقه باز $G(s)H(s)$ در نیمه راست صفحه s ، k قطب داشته باشد، برای پایدار بودن سیستم باید مکان هندسی $G(s)H(s)$ ، هنگامی که نقطه s روی مسیر اصلاح شده نایکویست در جهت ساعتگرد حرکت می‌کند، نقطه $-1+j0$ را در جهت پاد ساعتگرد k بار دور بزند.

۱. نقطه $-1+j0$ دور زده نمی‌شود. این به آن معنی است که اگر $G(s)H(s)$ در نیمه راست صفحه s قطب نداشته باشد سیستم پایدار است؛ در غیر این صورت سیستم ناپایدار است.

۲. نقطه $-1+j0$ در جهت پاد ساعتگرد یک یا چند بار دور زده می‌شود. در این صورت اگر تعداد دورها با تعداد قطبهای $G(s)H(s)$ واقع در نیمه راست صفحه s برابر باشد، سیستم پایداریست وگرنه سیستم پایدار نیست.

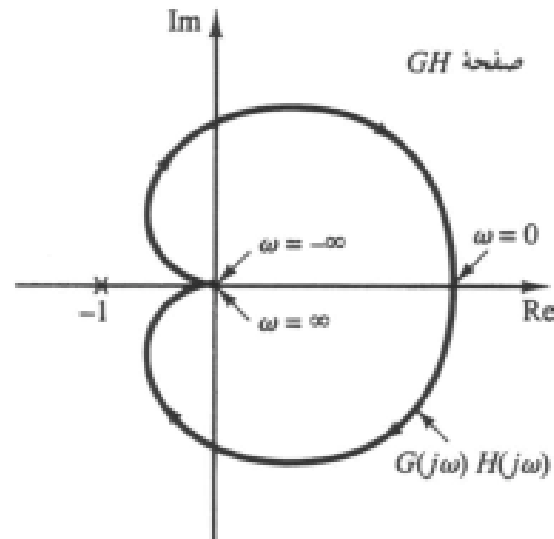
۳. نقطه $-1+j0$ در جهت ساعتگرد دور زده می‌شود. در این صورت سیستم ناپایدار است.

سیستم حلقه بسته‌ای با تابع تبدیل حلقه باز زیر در نظر بگیرید

$$G(s)H(s) = \frac{K}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$$

پایداری سیستم را بررسی کنید.

مقادیر بهره K و ثابت زمانی‌ها (مثل T_1 ، T_2 و غیره) همگی مثبت‌اند.

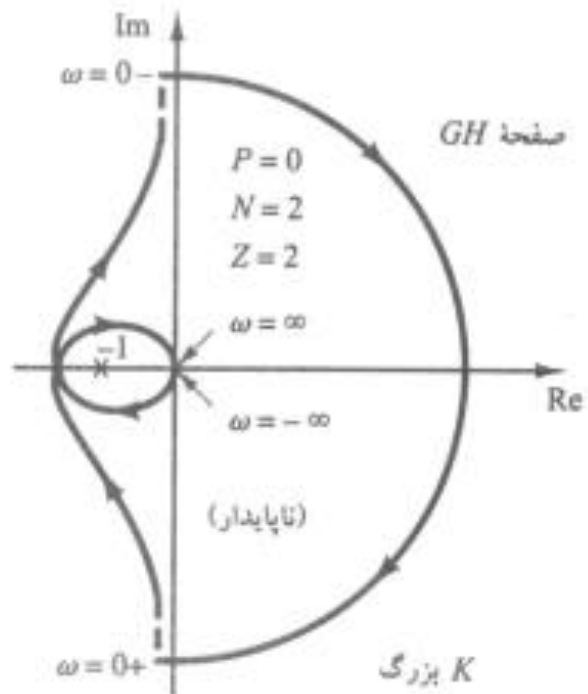
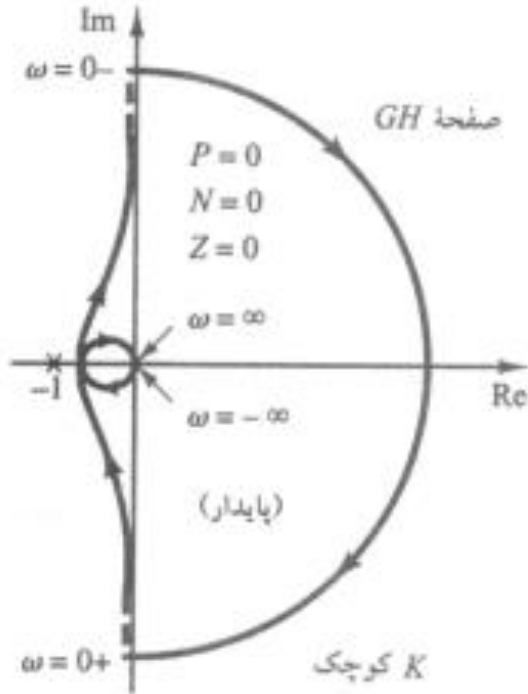


شکل ۵۳-۷ نمودار $G(j\omega)H(j\omega)$ را نشان می‌دهد. چون $G(s)H(s)$ در نیمه راست صفحه s قطب ندارد و مکان هندسی $G(j\omega)H(j\omega)$ نقطه $-1 + j0$ را دور نمی‌زند، این سیستم به ازای تمام مقادیر K ، T_1 و T_2 پایدار است.

سیستمی با تابع تبدیل حلقه باز زیر در نظر بگیرید

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$$

پایداری سیستم را به ازای (۱) های کوچک و (۲) های بزرگ بررسی کنید.

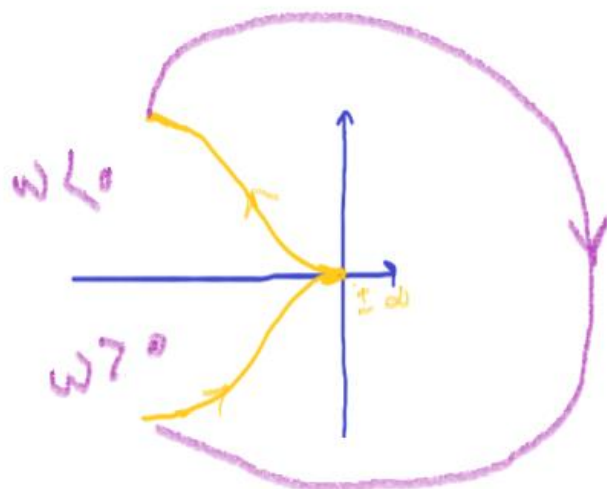
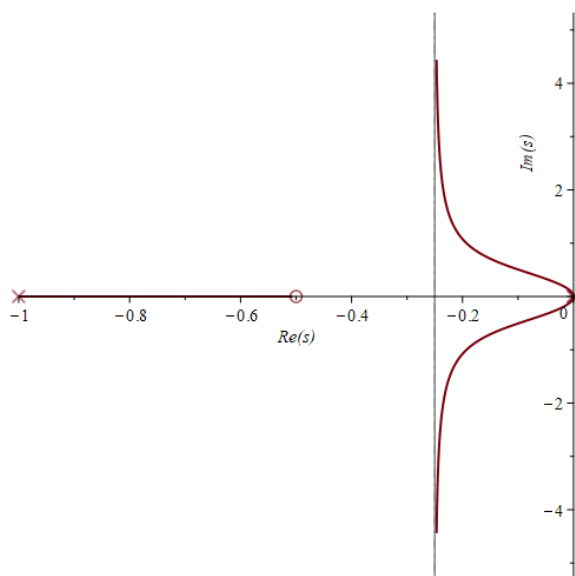


$$G(s)H(s) = \frac{K(T_2 s + 1)}{s^2(T_1 s + 1)}$$

به ازای $T_1 > T_2$ مکان هندسی $G(s)H(s)$ نقطه $z = -1$ را در جهت ساعتگرد دوبار دور می‌زند. پس سیستم حلقه بسته دو قطب در نیم صفحه راست دارد و ناپایدار است.

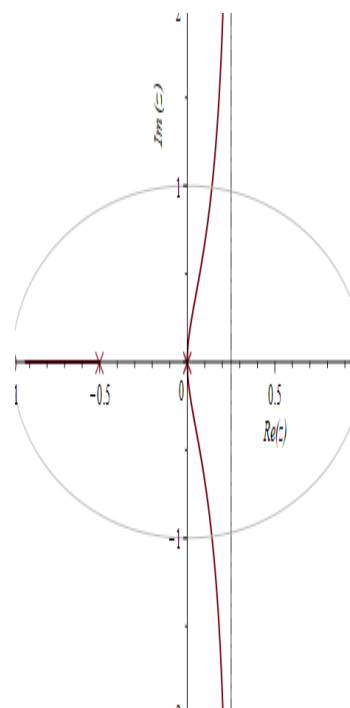
$K=1, T_1=1, T_2=2$

$$\frac{2s+1}{s^3+s^2}$$



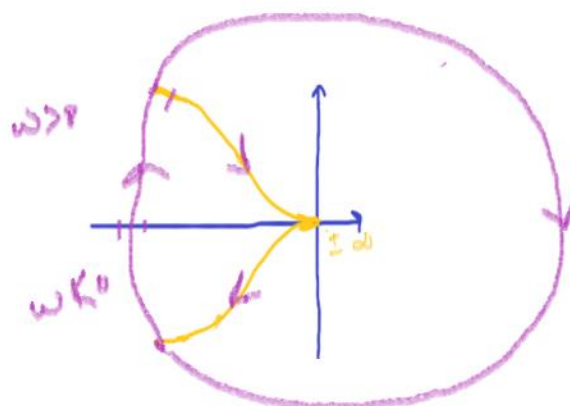
$K=1, T_1=2, T_2=1$

$$\frac{s+1}{2s^3+s^2}$$



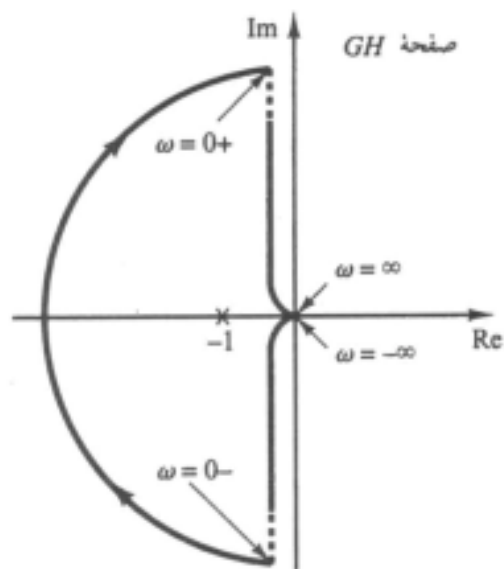
$$X := \frac{-2w^2 - 1}{4w^4 + w^2}$$

$$Y := \frac{1}{4w^3 + w}$$



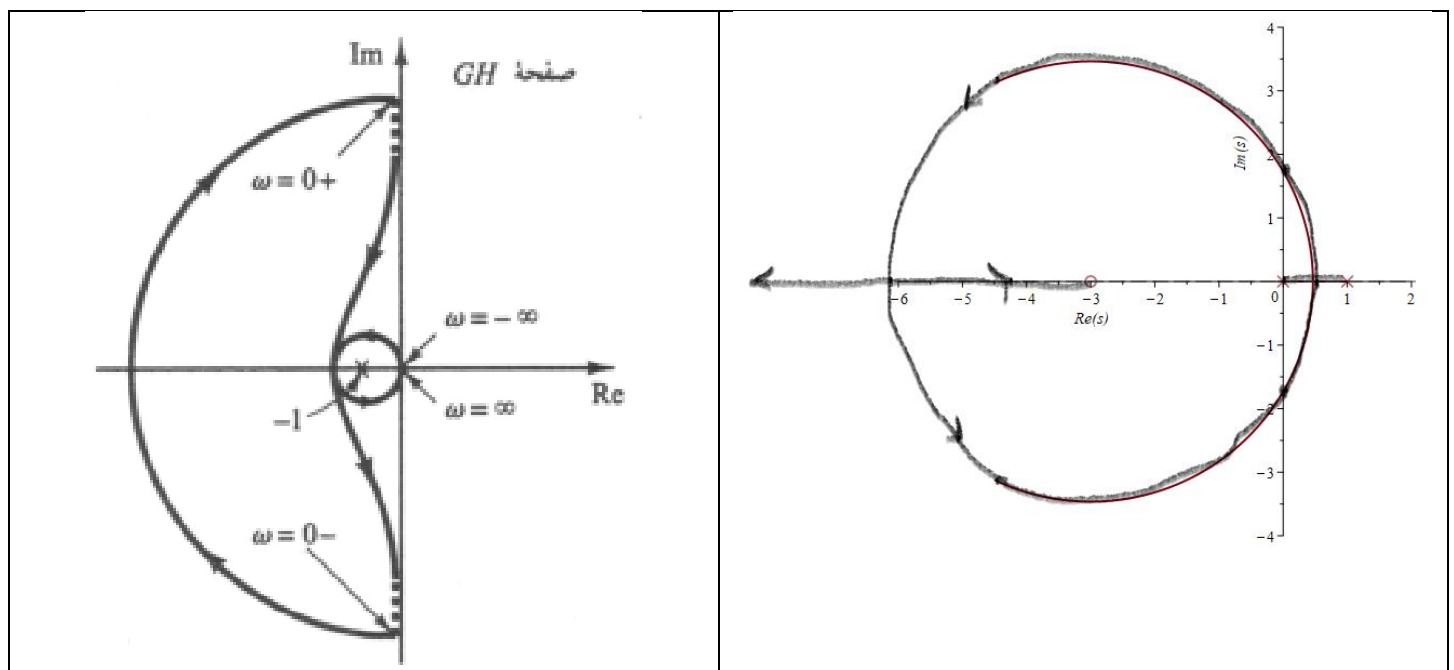
کلا اگر تابع تبدیل صرفاً یک انتگرالگیر یا مشتق گیر چندگانه باشد و یا تابع تبدیلی شامل بیش از یک انتگرالگیر یا مشتق گیر باشد کاربرد معیار نایکویست با دشواریهایی در تشخیص دور زدن حول -1 همراه است.

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(Ts-1)}$$



چون $Z = N + P$ ، $Z = 2$ یعنی سیستم حلقه بسته در نیم صفحه راست s دو قطب دارد

$$G(s)H(s) = \frac{K(s+3)}{s(s-1)} \quad (K > 1)$$

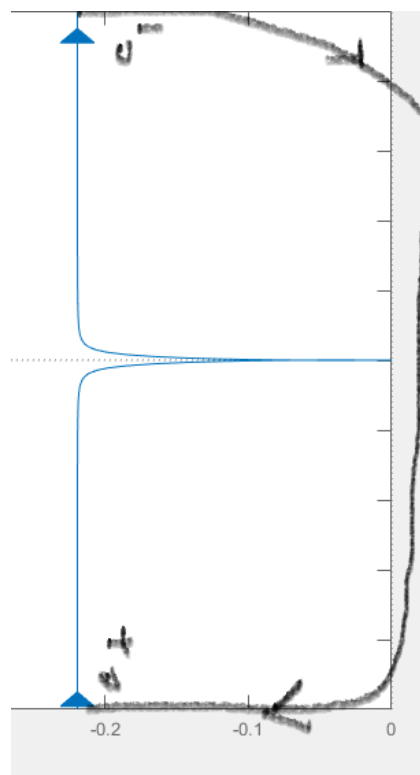
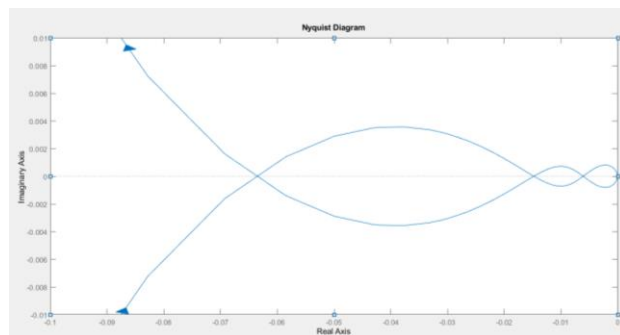
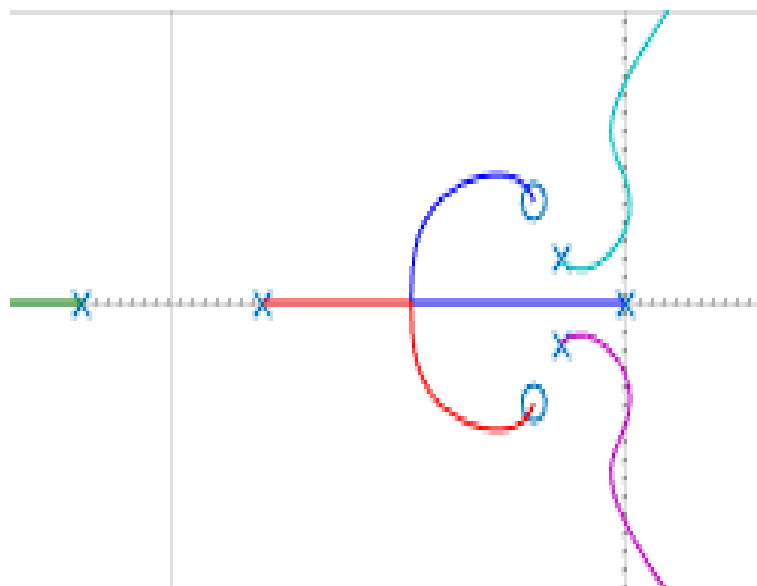


تابع تبدیل حلقه باز در نیم صفحه راست یک قطب (در $s=1$) دارد، پس $P=1$

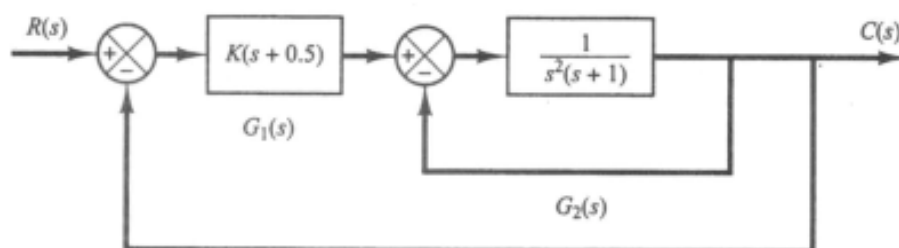
پاد ساعتگرد یکبار دور می‌زند، $N=-1$. پس Z طبق رابطه $Z = N + P$ صفر است

پایداری مشروط

$$\frac{s^2 + 2s + 4}{s(s+4)(s+6)(s^2 + 1.4s + 1)}$$



سیستم کنترل شکل ۷-۶ را در نظر بگیرید. این سیستم دو حلقه دارد. با استفاده از معیار پایداری نایکوئیست گسترده بهره K برای پایداری سیستم را تعیین کنید. (بهره K مثبت است.)

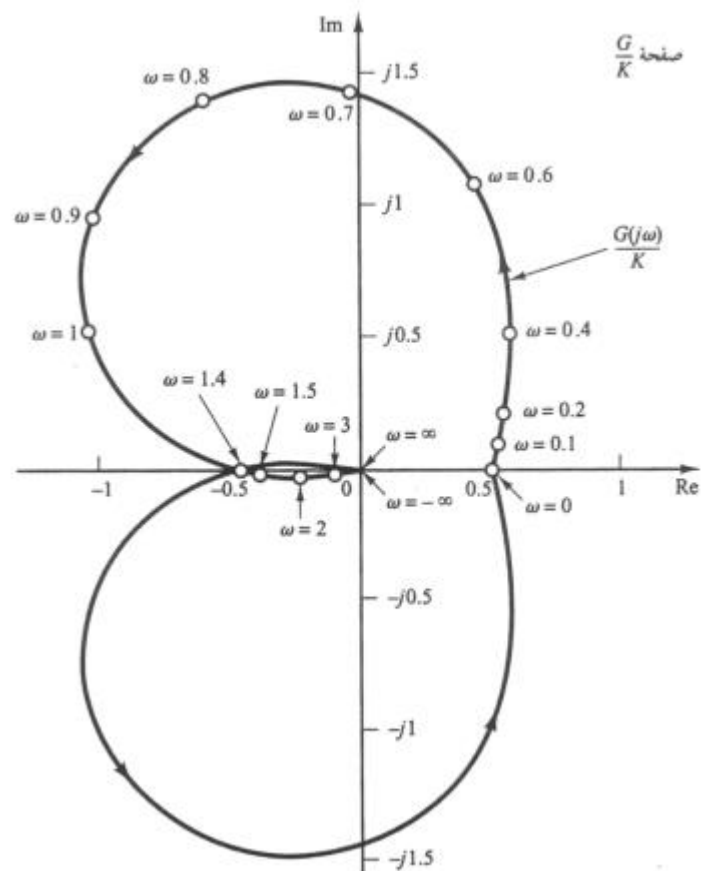


$$G_T(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1}$$

$$\begin{array}{ccc} s^2 & 1 & 0 \\ s^1 & 1 & 1 \\ s^0 & -1 & 0 \\ s^{-1} & 1 & \end{array}$$

$G_T(s)$ در نیمه راست صفحه s دو قطب دارد.

$$G(s) = G_1(s) G_T(s) = \frac{K(s + 0.5)}{s^2 + s + 1}$$



چون $G(s)$ در نیم صفحه راست دو قطب دارد، $P=2$

$$Z = P + N$$

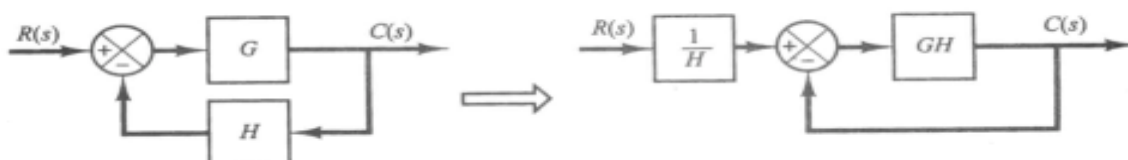
برای پایداری باید داشته باشیم $Z=0$ یا $N=-2$

جهت پادساعتگرد دوبار

$$-0.5K < -1$$

$$2 < K$$

تبدیل سیستمی با عنصر فیدبک به یک سیستم با فیدبک واحد.



حاشیه‌های فاز و بهره.

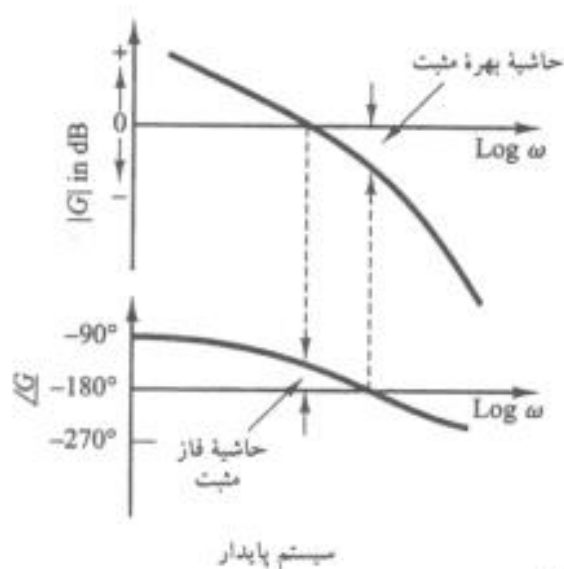
حاشیه فاز: حاشیه فاز عبارت است از مقدار پسفازی لازم در فرکانس عبور بهره، برای قرار دادن سیستم در مرز ناپایداری. فرکانس عبور بهره فرکانسی است که در آن $|G(j\omega)|$ یعنی دامنه تابع تبدیل حلقه باز برابر یک می‌شود. حاشیه فاز γ حاصل جمع 180° و فاز ϕ تابع تبدیل حلقه باز در فرکانس عبور بهره است، یا

$$\gamma = 180^\circ + \phi$$

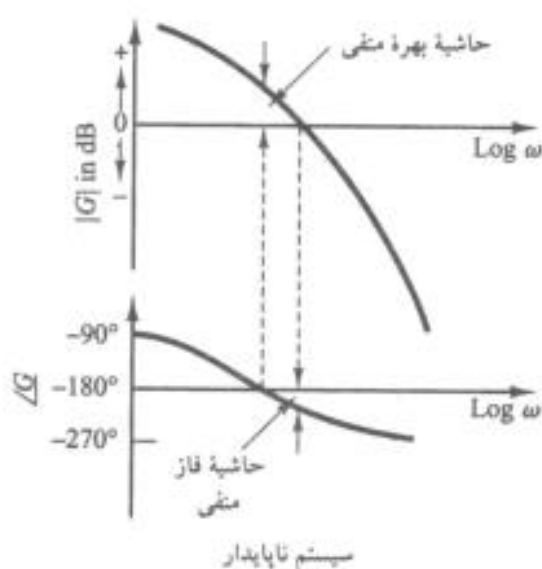
حاشیه بهره: حاشیه بهره عکس دامنه $|G(j\omega)|$ در فرکانسی است که زاویه فاز -180° می‌شود. اگر فرکانس عبور زاویه فاز ω_1 را فرکانسی تعریف کنیم که در آن زاویه تابع تبدیل حلقه باز -180° می‌شود، حاشیه بهره K_g عبارت است از:

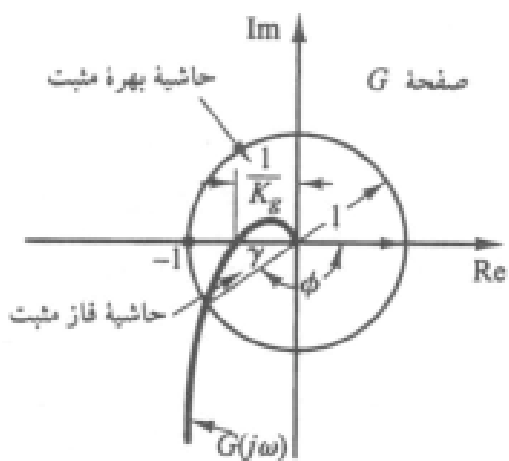
$$K_g = \frac{1}{|G(j\omega_1)|}$$

$$K_g \text{ dB} = 20 \log K_g = -20 \log |G(j\omega_1)|$$

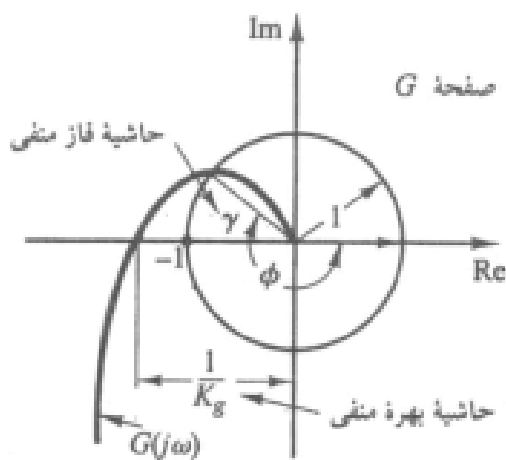


(الف)



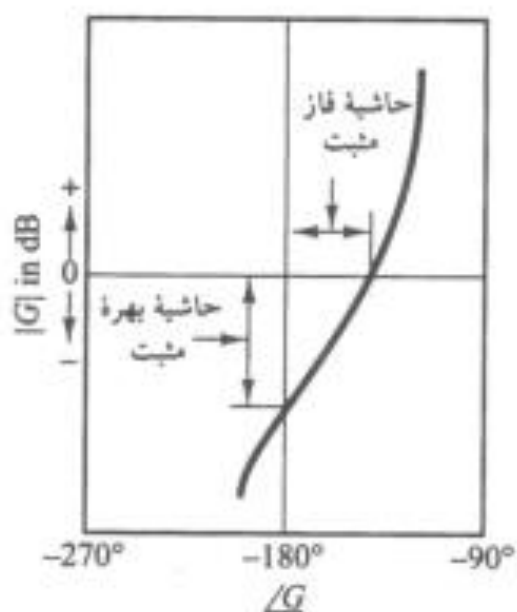


سیستم پایدار

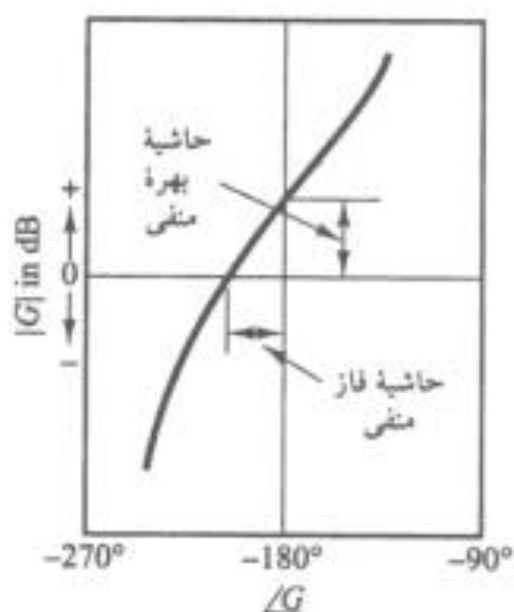


سیستم ناپایدار

(ب)



سیستم پایدار



سیستم ناپایدار

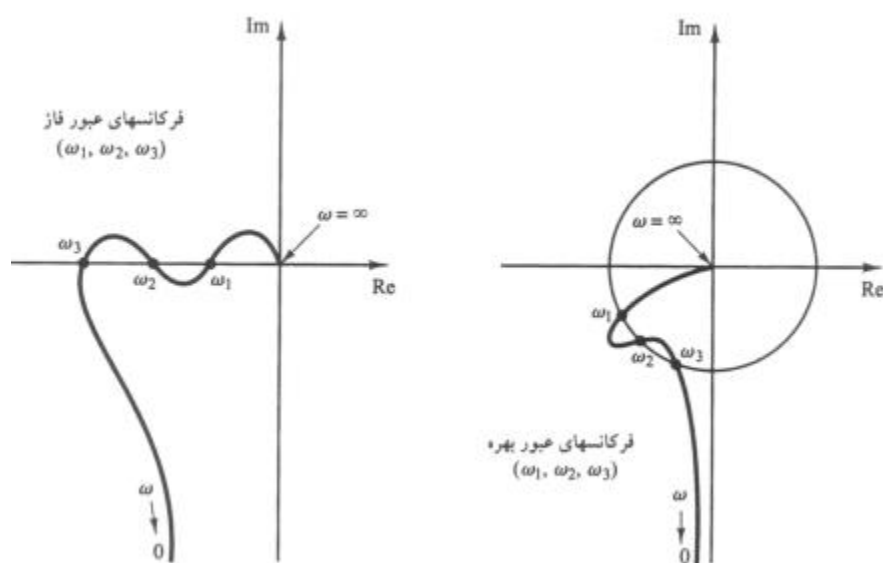
(ج)

برای یک سیستم می‌نیم فاز پایدار، حاشیه بهره نشان می‌دهد که بهره را چقدر می‌توان زیاد کرد، بدون این که سیستم ناپایدار شود. برای سیستم‌های ناپایدار حاشیه بهره نشان می‌دهد که برای پایدار شدن سیستم باید بهره را چقدر کم کرد.

حاشیه بهره سیستم‌های مرتبه اول و مرتبه دوم بینهایت است، زیرا برای چنین سیستم‌هایی نمودار قطبی بخش منفی محور حقیقی را قطع نمی‌کند. پس از لحاظ نظری سیستم‌های مرتبه اول و مرتبه دوم نمی‌توانند ناپایدار باشند. (البته توجه کنید که سیستم‌های موسوم به سیستم‌های مرتبه اول و مرتبه دوم تقریبی‌اند، از این

گفته شد که برای یک سیستم غیرمی نیمم فاز دارای تابع تبدیل حلقه باز ناپایدار، برای ارضای شرط پایداری نمودار $G(j\omega)$ باید حتماً نقطه $-1+j0$ را دور بزنند. بنابراین حاشیه فاز و حاشیه بهره این سیستم غیرمی نیمم فاز پایدار، منفی است.

توجه به این نکته نیز مهم است که سیستمهای دارای پایداری مشروط بیش از یک فرکانس عبور فاز دارند، همچنین بعضی سیستمهای مرتبه بالای دارای صفر نیز ممکن است مطابق شکل ۷-۶۸ چند فرکانس عبور بهره داشته باشند. برای سیستمهای پایداری که چند فرکانس عبور بهره دارند، حاشیه فاز در فرکانس عبوری که بالاترین بهره را دارد حساب می شود.



برای عملکرد مطلوب حاشیه فاز باید بین 30° و 60° بوده، حاشیه

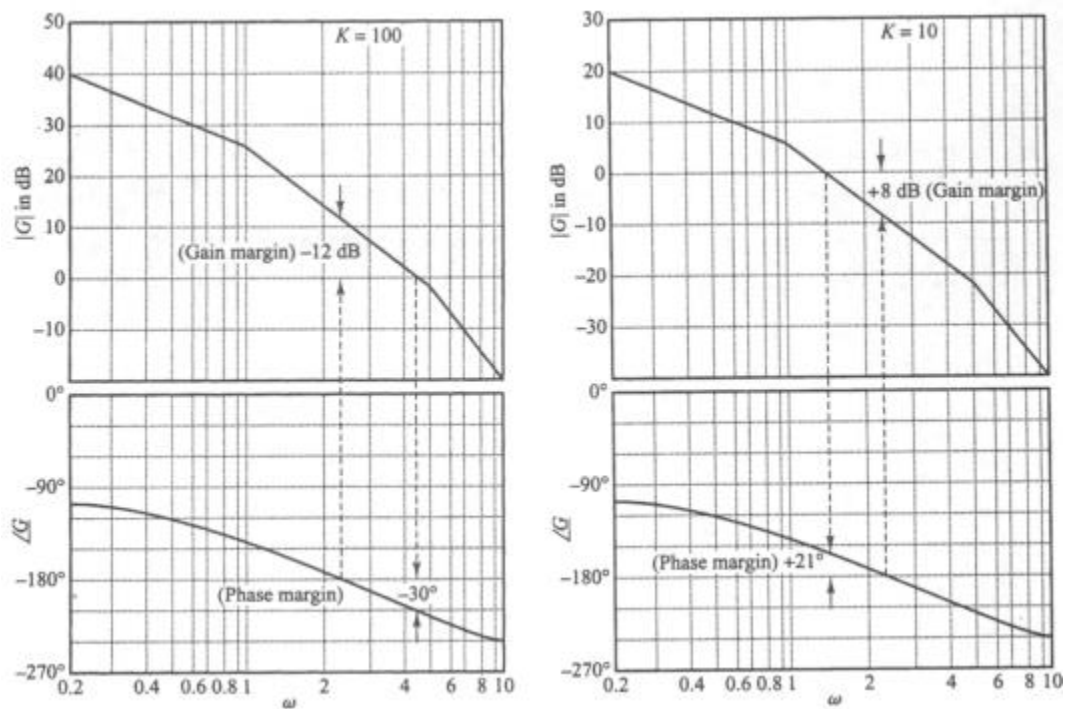
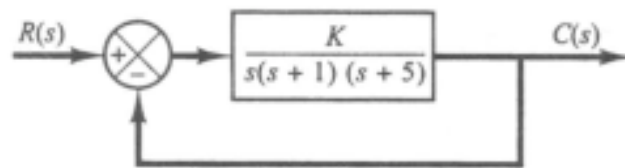
بهره از ۶ dB بزرگتر باشد

به ازای این مقادیر پایداری سیستم می نیمم فاز تضمین می شود،

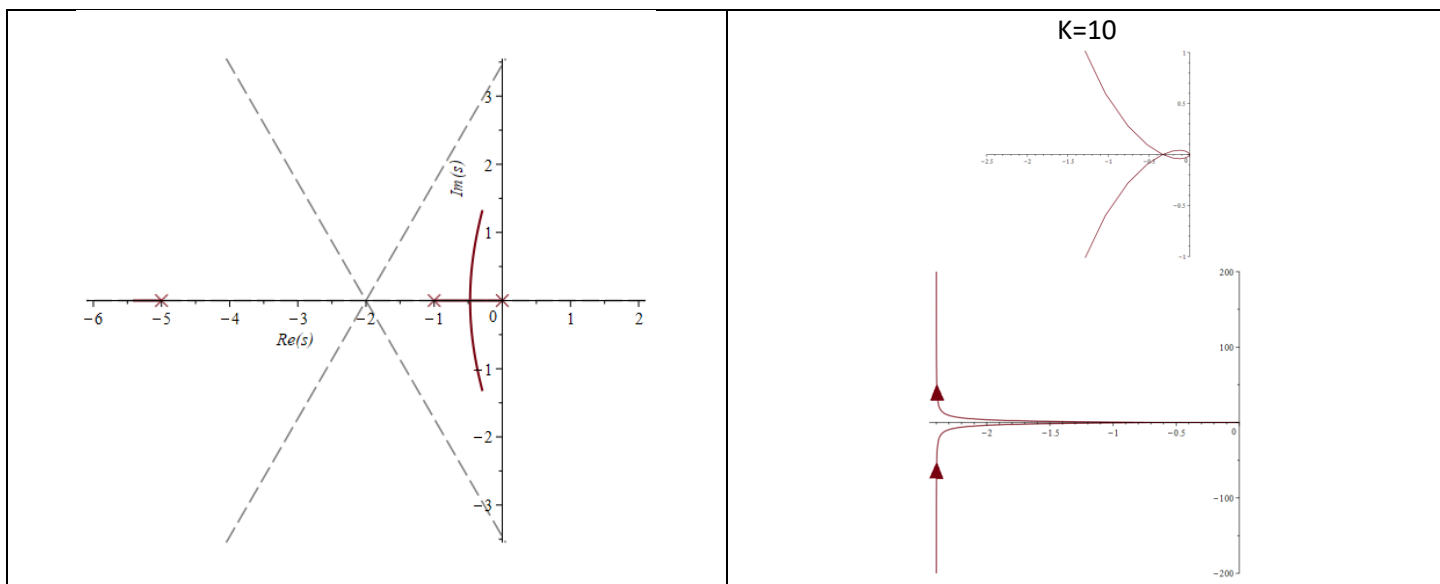
در سیستمهای می نیمم فاز مشخصات دامنه و فاز تابع تبدیل حلقه بسته کاملاً به هم وابسته اند. لازمه بین 30° و 60° بودن حاشیه فاز این است که شیب منحنی لگاریتم دامنه فاز نمودار بوده در فرکانس عبور بهره کمتر از ۴۰ dB/dec باشد. در اغلب موارد عملی برای پایداری سیستم بهتر است شیب منحنی در فرکانس عبور بهره ۲۰ dB/dec باشد. در صورت ۴۰ dB/dec بودن شیب، سیستم می تواند پایدار یا ناپایدار باشد. (حتی اگر سیستم پایدار باشد، حاشیه فاز کوچکی دارد.) اگر شیب در فرکانس عبور بهره ۶۰ dB/dec یا بیشتر باشد، سیستم به احتمال زیاد ناپایدار است.

سیستمهای غیر می نیمم فاز بهتر است به جای نمودار بوده از نمودار نایکویست استفاده شود.

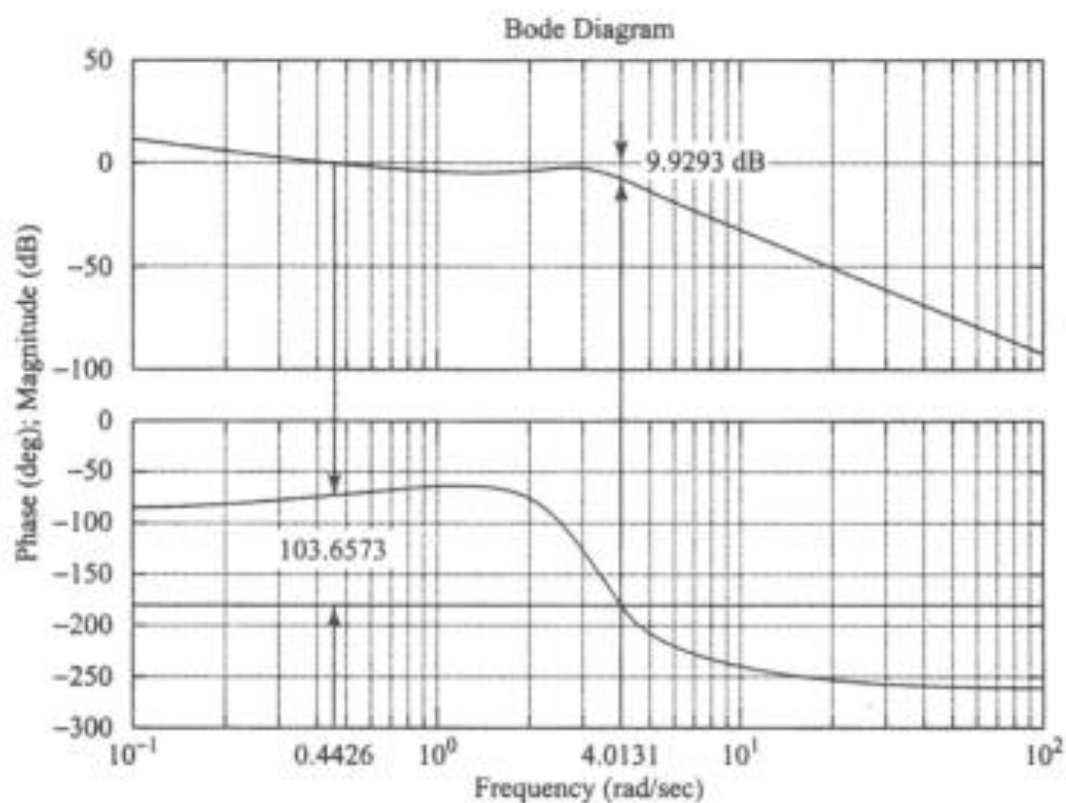
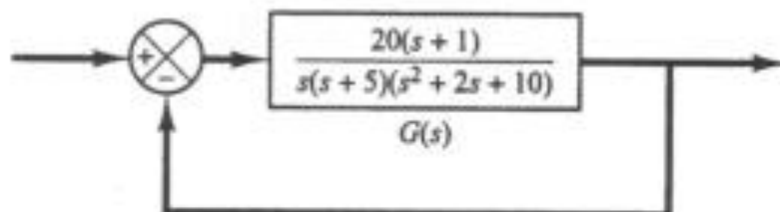
حاشیه فاز و بهره سیستم شکل ۶۹-۷ را برای دو حالت $K=10$ و $K=100$ به دست آورید.



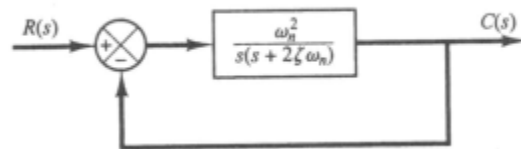
سیستم به ازای $K=10$ پایدار و به ازای $K=100$ ناپایدار است.



نمودار بوده سیستم حلقه بسته نشان داده شده در شکل ۷-۷۱ را رسم کنید. حاشیه فاز، حاشیه بهره، فرکانس عبور فاز، و فرکانس عبور بهره را به کمک MATLAB بیابید.



دامنه قلّه تشدید M_r و فرکانس تشدید ω_r



$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$\frac{C(j\omega)}{R(j\omega)} = \frac{1}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right) + j2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}} = M e^{j\alpha}$$

$$M = \frac{1}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}^{\frac{1}{2}}, \quad \alpha = -\tan^{-1} \frac{2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}$$

به ازای $0 \leq \zeta \leq 0.707$ ماکزیمم مقدار M در فرکانس ω_r رخ می‌دهد

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}$$

$$M_r = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1 - \zeta^2}}$$

دامنه قلّه تشدید پایداری نسبی سیستم را نشان می‌دهد. بزرگ بودن دامنه قلّه تشدید نشان می‌دهد که یک زوج قطب حلقه بسته با نسبت میرایی کوچک وجود دارد که پاسخ گذرای نامطلوبی ایجاد می‌کند. ولی کوچک بودن قلّه تشدید نبودن چنین قطبهای با میرایی کوچک را نشان می‌دهد، که به معنی وجود سیستمی با میرایی خوب است.

همبستگی بین پاسخ پله و پاسخ فرکانسی سیستمهای استاندارد مرتبه دوم

$$c(t) = 1 - e^{-\zeta \omega_n t} \left(\cos \omega_d t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \omega_d t \right)$$

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2}$$

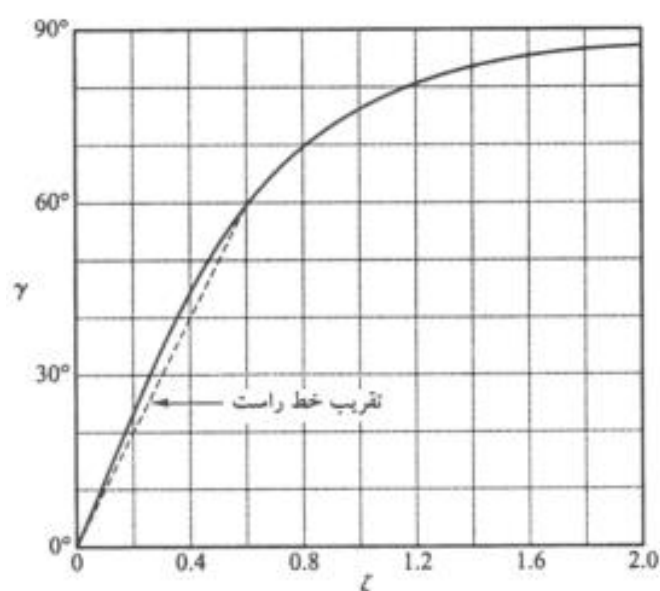
$$M_p = e^{-\left(\zeta / \sqrt{1-\zeta^2}\right) \pi}$$

به ازای ورودی سینوسی دامنه $G(j\omega)$ هنگامی یک است که داشته باشیم

$$\omega = \omega_n \sqrt{\sqrt{1+4\zeta^2} - 2\zeta^2}$$

$$\angle G(j\omega) = -\angle j\omega - \angle j\omega + 2\zeta \omega_n = -90^\circ - \tan^{-1} \frac{\sqrt{\sqrt{1+4\zeta^2} - 2\zeta^2}}{2\zeta}$$

$$\begin{aligned} \gamma &= 180^\circ + \angle G(j\omega) \\ &= 90^\circ - \tan^{-1} \frac{\sqrt{\sqrt{1+4\zeta^2} - 2\zeta^2}}{2\zeta} \\ &= \tan^{-1} \frac{2\zeta}{\sqrt{\sqrt{1+4\zeta^2} - 2\zeta^2}} \end{aligned}$$



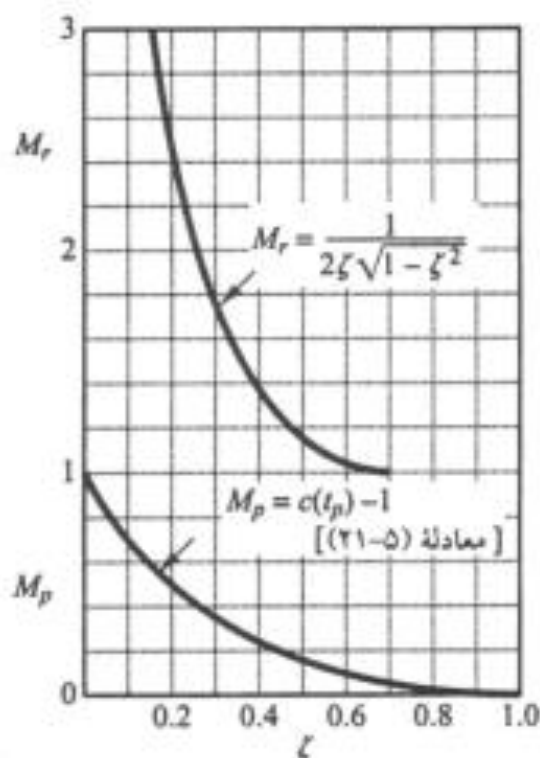
حاشیه فاز γ و نسبت میرایی به ازای $0 \leq \zeta \leq 0.6$

$$\zeta = \frac{\gamma}{100}$$

پس حاشیه فاز 60° با نسبت میرایی ۰.۶ متناظر است.

به ازای مقادیر کوچک ζ مقادیر ω_r و ω_d تقریباً

برابرند. پس به ازای ζ کوچک مقدار ω_r سرعت پاسخ گذرای سیستم را نشان می‌دهد.



معادلات (۷-۱۸) و (۷-۲۰) نشان می‌دهند که هر چه ζ کوچکتر باشد، مقادیر M_p و M_r بزرگتر می‌شود. شکل ۷-۷۵ رابطه بین M_p و M_r را به صورت تابعی از ζ نشان می‌دهد. می‌توان دید که به ازای $\zeta > 0.4$ رابطه نزدیکی بین M_p و M_r برقرار است. برای مقادیر کوچک ζ ، M_r خیلی بزرگ می‌شود ($M_r \gg 1$) ولی M_p از یک تجاوز نمی‌کند.

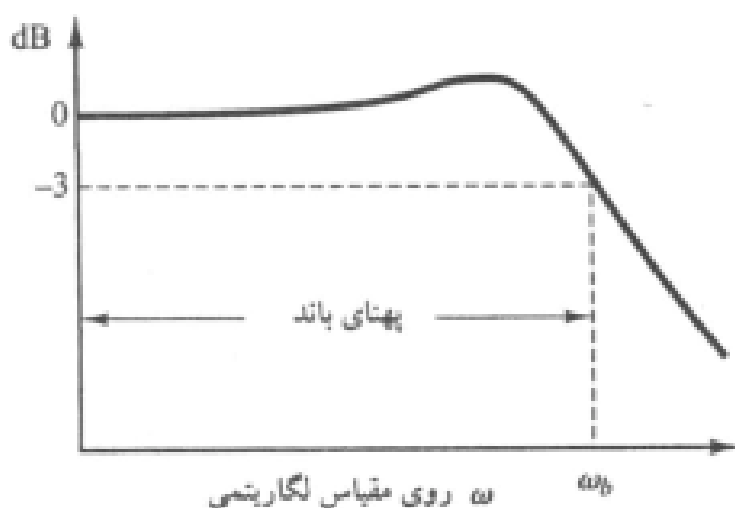
امکان اعمال رابطه پاسخ گذرا - پاسخ فرکانسی موجود در سیستم مرتبه دوم شکل ۷-۷۳ به سیستمهای مرتبه بالاتر، به وجود یک زوج قطب غالب حلقه بسته در این سیستمها بستگی دارد. واضح است که اگر پاسخ فرکانسی یک سیستم مرتبه بالا عمدتاً توسط یک زوج قطب مزدوج مختلط حلقه بسته تعیین شود، رابطه پاسخ گذرا - پاسخ فرکانسی سیستم مرتبه دوم را می‌توان به آن سیستم تعمیم داد.

۱. مقدار M_r پایداری نسبی را نشان می‌دهد. عملکرد گذرای مطلوب معمولاً به ازای M_r واقع در گستره $1/4 < M_r < 1/2$ ($0\text{dB} < M_r < 3\text{dB}$) که با نسبت میرایی $0/7 < \xi < 0/4$ متناظر است، به دست می‌آید. به ازای $M_r > 1/5$ پاسخ گذرا ممکن است چند فراجاهش داشته باشد. (در حالت کلی M_r بزرگ با فراجاهش بزرگ در پاسخ گذرا متناظر است. اگر سیستم در معرض نویزی با فرکانسهای حول و حوش ω_r قرار داشته باشد، نویز تقویت می‌شود و در خروجی مشکلاتی جدی بروز می‌کند.)

۲. مقدار فرکانس تشدید ω_r سرعت پاسخ گذاری سیستم را نشان می‌دهد. هر چه ω_r بزرگتر باشد، پاسخ زمانی سریعتر است. به عبارت دیگر زمان صعود با ω_r نسبت عکس دارد. برحسب پاسخ فرکانسی حلقه باز، فرکانس طبیعی میرای پاسخ گذرا بین فرکانس عبور بهره و فرکانس عبور فاز است.

۳. در سیستمهای با میرایی کم، فرکانس تشدید ω_r و فرکانس طبیعی میرا ω_d پاسخ پله بسیار به هم نزدیک‌اند.

فرکانس قطع و پهنای باند.



پهنای باند نشان می‌دهد که سیستم در دنبال کردن ورودی سینوسی چقدر خوب عمل می‌کند.

به ازای ω_n معین، هر چه نسبت میرایی ξ بزرگتر باشد، زمان صعود نیز بزرگتر می‌شود.

با افزایش ξ پهنای باند کم می‌شود. پس زمان صعود و پهنای باند با هم نسبت عکس دارند.

مشخصات پهنای باند را می‌توان با عوامل زیر تعیین کرد:

۱. توانایی سیستم در بازسازی سیگنال ورودی. پهنای باند بزرگ با زمان صعود کوچک، یا پاسخ سریع متناظرست. تقریباً می‌توان گفت که پهنای باند با سرعت پاسخ متناسب است. (مثلاً برای کاهش زمان صعود پاسخ پله با ضریب ۲ باید پهنای باند نیز تقریباً با ضریب ۲ افزایش یابد).
 ۲. مشخصات فیلتر لازم برای حذف نویز فرکانس بالا.
- برای این که سیستم یک ورودی دلخواه را به خوبی دنبال کند باید پهنای باند بزرگی داشته باشد. ولی از دید نویز پهنای باند سیستم نباید خیلی بزرگ باشد. پس پهنای باند باید دو خواسته متناقض را برآورده کند، و بنابراین برای طراحی خوب معمولاً باید مصالحه‌ای صورت بگیرد. دقت کنید که برای بزرگ بودن پهنای باند باید اجزاء سیستم کیفیت خوبی داشته باشند. بنابراین معمولاً هزینه سیستم با افزایش پهنای باند زیادتر می‌شود.

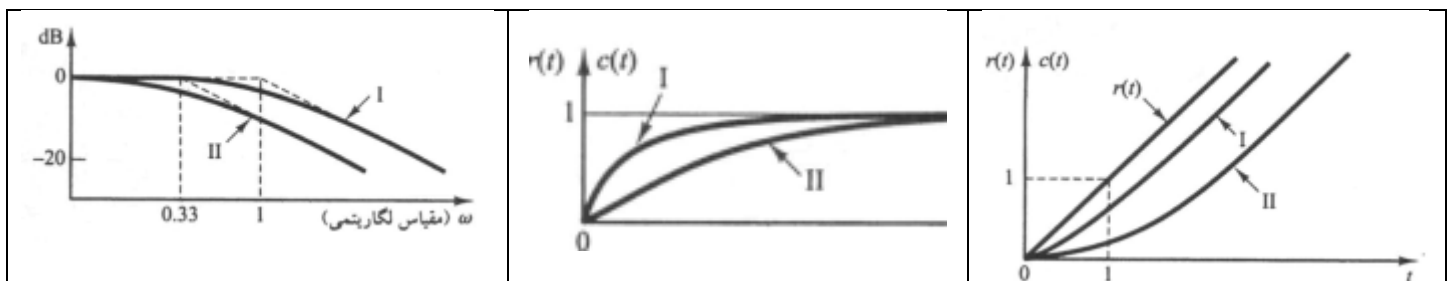
آهنگ قطع. آهنگ قطع شیب منحنی لگاریتم دامنه در نزدیک فرکانس قطع است. آهنگ قطع توانایی سیستم برای جداسازی سیگنال از نویز را نشان می‌دهد.

توجه کنید که یک منحنی پاسخ فرکانسی حلقه بسته با شیب قطع تند ممکن است دامنه قله تشدید بزرگی داشته باشد، که نشان می‌دهد حاشیه پایداری سیستم نسبتاً کم است.

دو سیستم زیر را در نظر بگیرید:

$$\text{سیستم I: } \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{s+1} \quad \text{و} \quad \text{سیستم II: } \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{3s+1}$$

پهنای باند دو سیستم را مقایسه کرده، نشان دهید سیستم با پهنای باند بزرگتر پاسخ سریعتری دارد و بسیار بهتر از سیستم دارای پهنای باند کوچکتر ورودی را دنبال می‌کند.



سیستم I که پهنای باند آن سه برابر پهنای باند سیستم II است، پاسخ سریعتری دارد

پاسخ فرکانسی حلقه بسته

سیستمهای با فیدبک واحد



$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)}$$

$$\frac{C(j\omega)}{R(j\omega)} = M e^{j\alpha}$$

مکان هندسی دامنه - ثابت (دایره‌های M)

$$G(j\omega) = X + jY$$

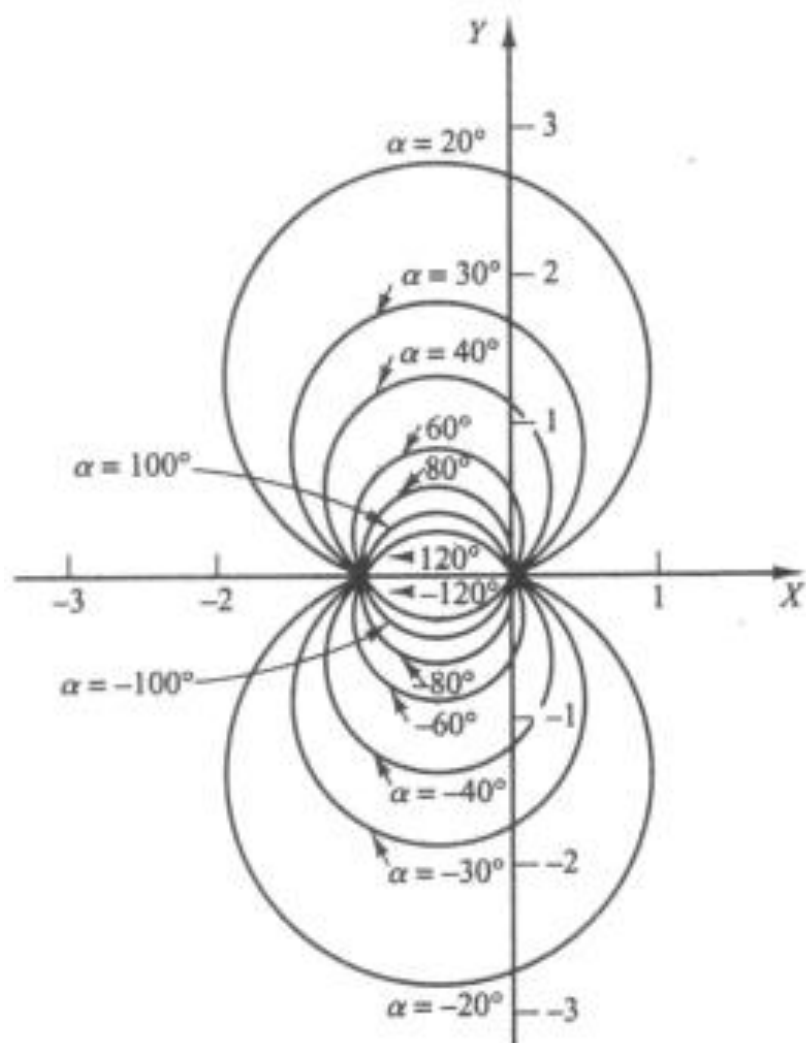
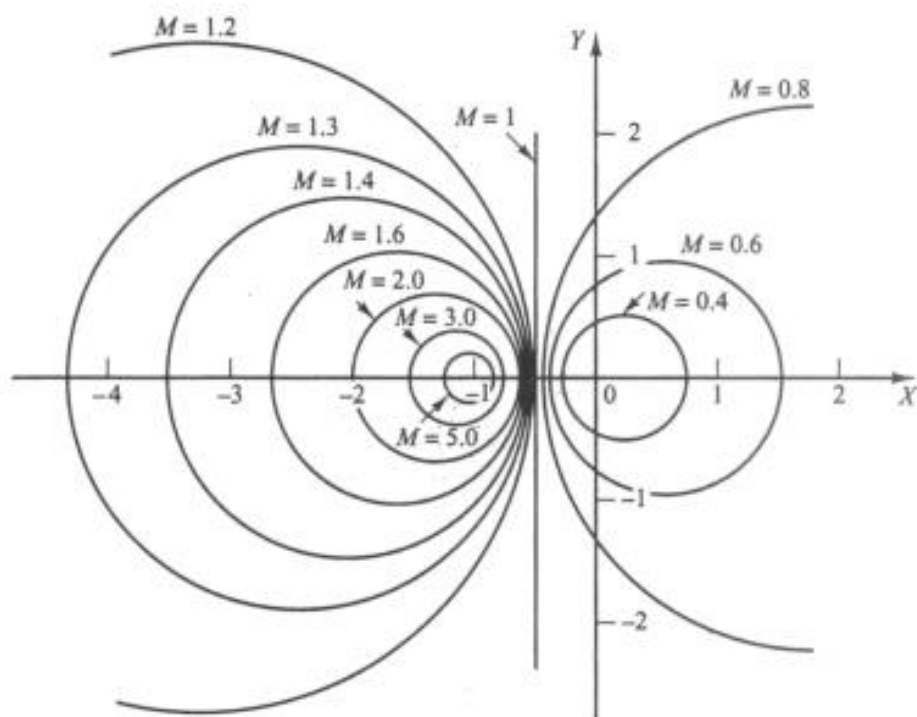
$$M = \frac{|X + jY|}{|1 + X + jY|}$$

$$\underline{e^{j\alpha}} = \frac{X + jY}{1 + X + jY}$$

$$\tan \alpha = N$$

$$\left(X + \frac{Y^2}{M^2 - 1} \right)^2 + Y^2 = \frac{M^2}{(M^2 - 1)^2}$$

$$\left(X + \frac{1}{2} \right)^2 + \left(Y - \frac{1}{2N} \right)^2 = \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2N} \right)^2$$



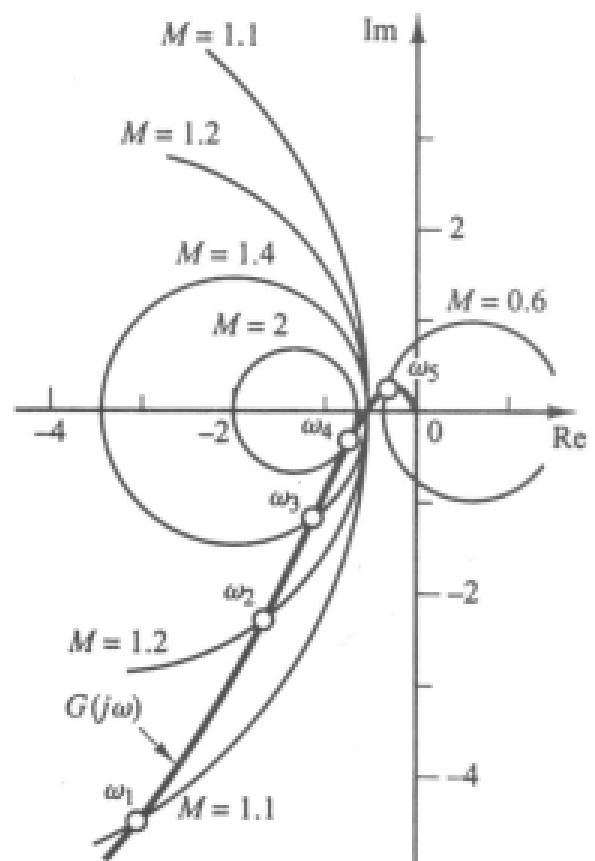
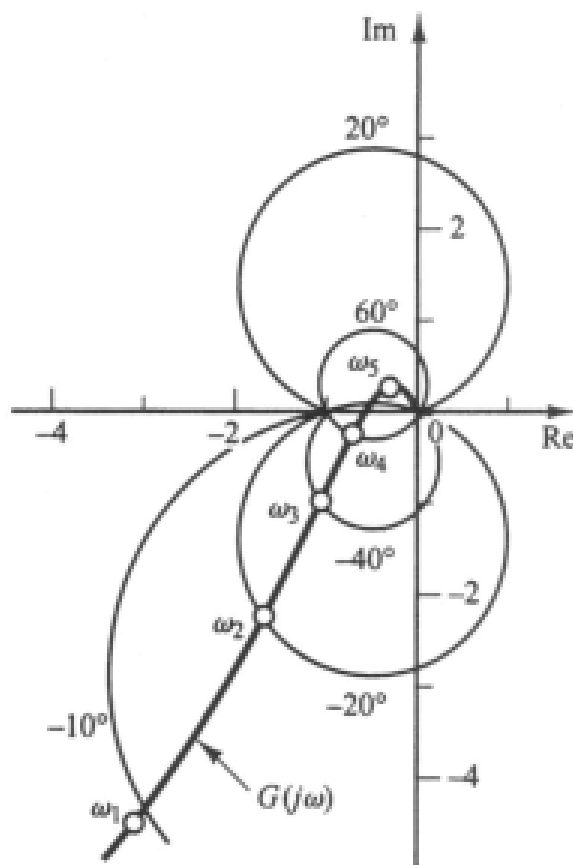
باید تذکر دهیم که مکان هندسی N - ثابت به ازای یک α تمام دایره نیست، بلکه تنها کمائی از آن است. به عبارت دیگر کمانهای $\alpha = 30^\circ$ و $\alpha = -150^\circ$ بخشهایی از یک دایره هستند. علت این است که با افزودن $\pm 180^\circ$ (و مضارب آن) به یک زاویه تانژانت تغییر نمی‌کند.

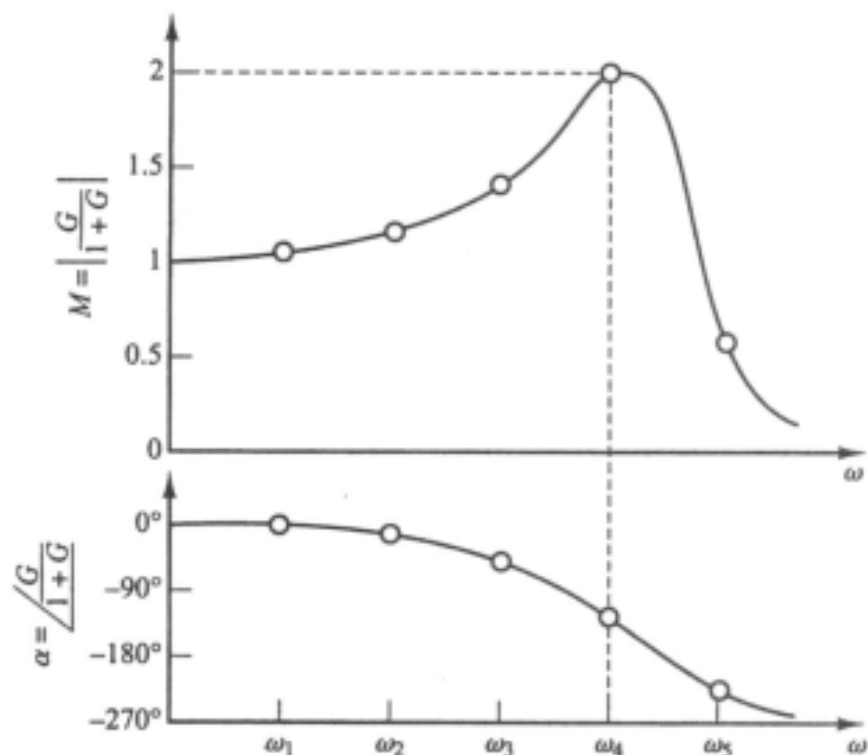
برای پرهیز از هر نوع اشتباه، از فرکانس صفر، که با $\alpha = 0^\circ$ متناظر است، شروع کنید و به

فرکانسهای بالاتر بروید. منحنی زاویه‌فاز باید پیوسته باشد.

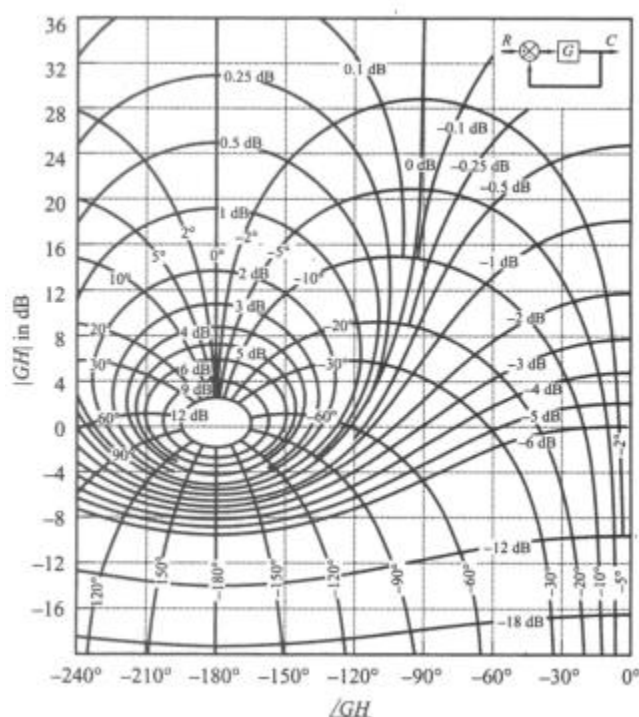
نقاط برخورد مکان هندسی $G(j\omega)$ و دایره‌های M ، مقادیر M در فرکانسهای مشخص شده روی مکان هندسی $G(j\omega)$ را به دست می‌دهند. پس دایره M ثابتی که کوچکترین شعاع را دارد، و بر مکان هندسی

$G(j\omega)$ مماس است، مقدار قله تشدید M_r را به دست می‌دهد. اگر بخواهیم مقدار قله تشدید از مقدار معینی کمتر باشد، منحنی $G(j\omega)$ نباید نقطه بحرانی (نقطه $-1+j0$) را دربر گیرد و در همین حال نباید دایره M دارای آن مقدار معین را قطع کند.





نمودار نیکولس. در مسائل طراحی ترسیم مکانهای M و N در صفحه لگاریتم دامنه برحسب فاز مناسبتر است. نمودار متشکل از مکانهای هندسی M و N در صفحه لگاریتم دامنه برحسب فاز، نمودار نیکولس نامیده می‌شود. مکان هندسی $G(j\omega)$ رسم شده بر روی نمودار نیکولس هم مشخصه بهره و هم مشخصه فاز تابع تبدیل سیستم حلقه بسته را به دست می‌دهد. شکل ۷-۸۴ این نمودار را برای زاویه‌های فاز بین 0° تا -240° نشان می‌دهد.

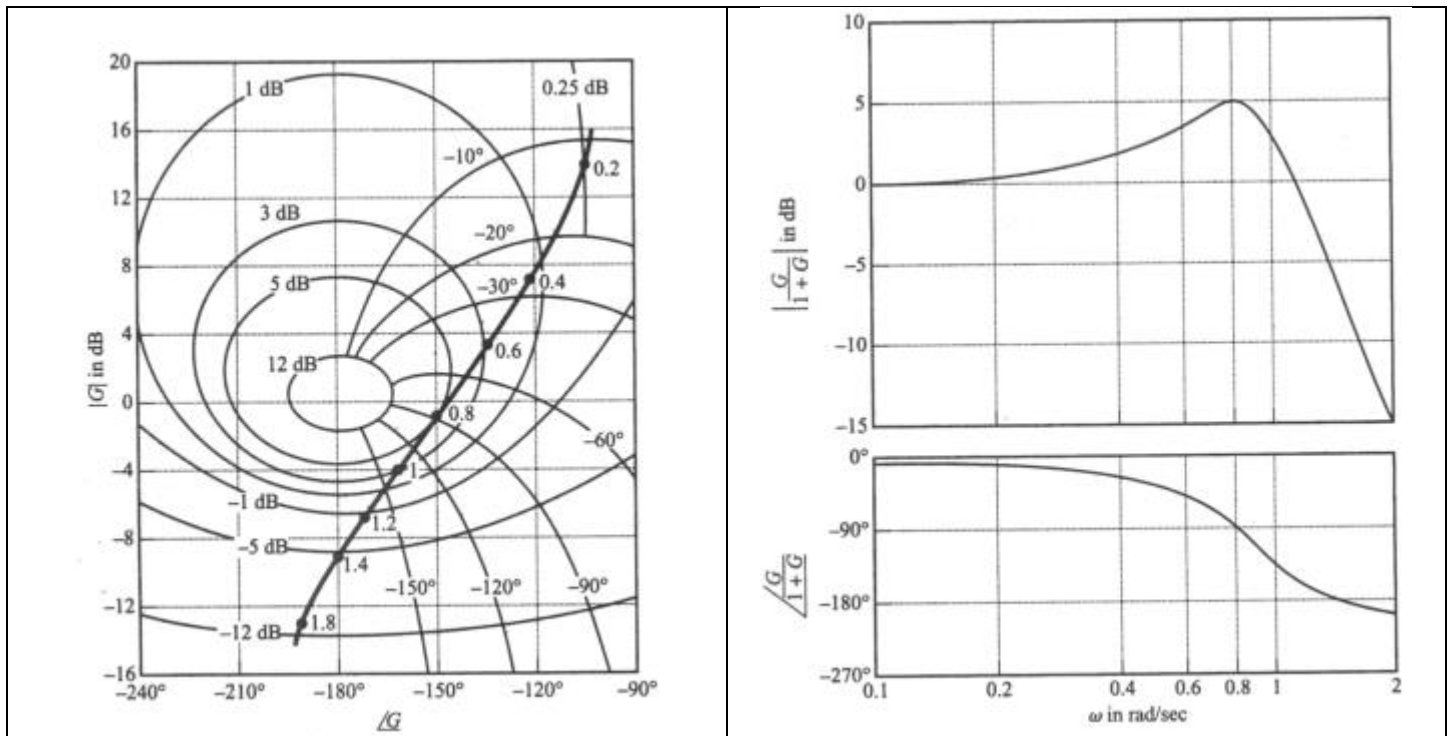


نقطه بحرانی $1+j0$ در نمودار نیکولس به نقطه $(-180^\circ, 0 \text{ dB})$ نگاشته می‌شود.

نمودار نیکولس نسبت به محور -180° متقارن است. مکانهای هندسی M و N در هر 360° تکرار می‌شوند، و در فواصل 180° درجه‌ای متقارن‌اند. مرکز مکانهای هندسی M نقطه بحرانی $(-180^\circ, 0 \text{ dB})$ است.

به عنوان مثال سیستم دارای فیدبک واحدی با تابع تبدیل حلقه باز زیر در نظر بگیرید

$$G(j\omega) = \frac{K}{s(s+1)(0.5s+1)} \quad , \quad K=1$$



تشدید $M_r = 5 \text{ dB}$ است. فرکانس تشدید 0.78 rad/sec است.

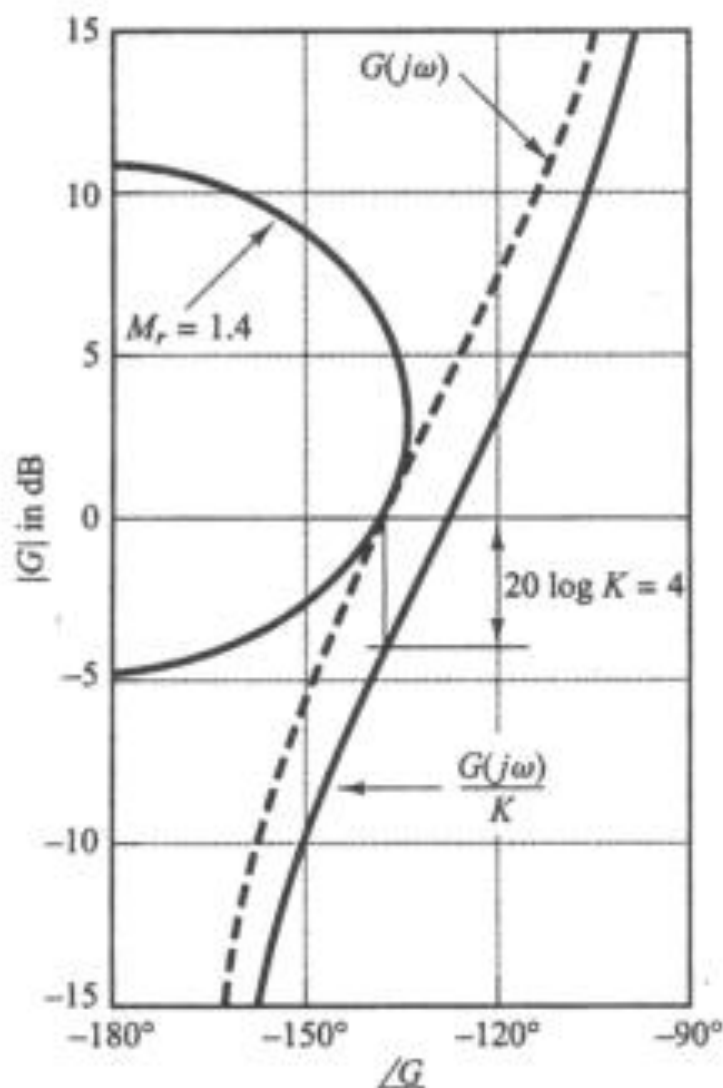
توجه کنید که فرکانس عبور فاز را نقطه برخورد مکان هندسی $G(j\omega)$ و محور -180° تعیین می‌کند (برای این سیستم 0.78 rad/sec) و فرکانس عبور بهره محل برخورد مکان هندسی $G(j\omega)$ و محور 0 dB است (برای این سیستم 0.76 rad/sec). حاشیه فاز فاصله افقی (برحسب درجه) بین نقطه عبور بهره و نقطه بحرانی $(-180^\circ, 0 \text{ dB})$ است. حاشیه بهره فاصله قائم (برحسب دسیبل) نقطه عبور فاز و نقطه بحرانی است.

با تغییر بهره حلقه باز K شکل مکان هندسی $G(j\omega)$ در صفحه لگاریتم دامنه برحسب فاز بی تغییر می ماند، و تنها در امتداد محور قائم بالا (با افزایش K) یا پایین (با کاهش K) می رود. بنابراین مکان هندسی $G(j\omega)$ مکانهای هندسی M و N را در نقاطی متفاوت قطع کرده، منحنی پاسخ فرکانسی حلقه بسته متفاوتی به دست می آید. به ازای بهره کوچک K مکان هندسی به هیچ یک از مکانهای هندسی M مماس نمی شود، یعنی پاسخ فرکانسی حلقه بسته تشدید ندارد.

سیستم کنترل دارای فیدبک واحدی با تابع تبدیل حلقه باز زیر در نظر بگیرید

$$G(j\omega) = \frac{K}{j\omega(j\omega + 1)}$$

بهره K را طوری تعیین کنید که داشته باشیم $M_r = 1/4$.



شکل ۷-۸۶ مکان هندسی $M_r = 1/4$ و مکان هندسی $G(j\omega)/K$ را نشان می‌دهد. تغییر بهره زاویه فاز را تغییر نمی‌دهد و تنها اثر آن حرکت قائم منحنی به سمت بالا ($K > 1$) و پایین ($K < 1$) است.

$$20 \log K = 4$$

$$K = 1.59$$